GdT Théorie ergodique
04/10/2024

Partie III : Représentations unitaires de $\mathrm{Isom}(\mathbb{Q}\mathbb{U})$.

III.1) Espaces métriques d'Urysohn.

Définition : Un ensemble de distance est
- soit un sous semi-groupe dénombrable de $(\mathbb{R}_+, +)$ qui contient 0
- soit l'intersection d'un tel semi-groupe S avec $[0,d]$ avec $d \in S$.

Un Δ-espace métrique est (X,d) tq $d(X \times X) \subseteq \Delta$.

Définition : Le Δ-espace métrique d'Urysohn noté $\mathbb{U}_\Delta$ est l'unique Δ-espace métrique dénombrable tq :
- (ultrahomogène) $\forall A, B \subseteq \mathbb{U}_\Delta$ finis, $\forall \varphi : A \to B$ isométrie, $\exists \tilde{\varphi} \in \mathrm{Isom}(\mathbb{U}_\Delta)$ tq $\tilde{\varphi}|_A = \varphi$.
- (universel) Tout Δ-espace métrique fini (dénombrable) se plonge isométriquement dans $\mathbb{U}_\Delta$.

Exemples :
- $\Delta = \{0,1\} \rightsquigarrow \mathbb{U}_\Delta = (\mathbb{N}, d)$ d distance discrète $\mathrm{Isom}(\mathbb{U}_\Delta) = \mathrm{Sym}(\mathbb{U}_\Delta)$.
- $\Delta = \{0,1,2\} \rightsquigarrow \mathbb{U}_\Delta$ = graphe de Rado R.
- $\Delta = \mathbb{Q}_+$, $\mathbb{U}_\Delta = \mathbb{Q}\mathbb{U}$ espace d'Urysohn rationnel
- $\Delta = \mathbb{Z}_+$, $\mathbb{U}_\Delta = \mathbb{Z}\mathbb{U}$ ——— entier
- $\Delta = \mathbb{Q}_+ \cap [0,1]$, $\mathbb{U}_\Delta = \mathbb{Q}\mathbb{U}_1$ sphère d'Urysohn rationnelle.

$\mathrm{Isom}(\mathbb{U}_\Delta) \leq_f \mathrm{Sym}(\mathbb{U}_\Delta)$.

Lemme [SLUTSKY, 2012] $\mathrm{Isom}(\mathbb{U}_\Delta)$ a peu de SGO : $\forall V \leq_o \mathrm{Isom}(\mathbb{U}_\Delta)$, $\exists A \subseteq \mathbb{U}_\Delta$ tq $\mathrm{Isom}(\mathbb{U}_\Delta)_A \leq V \leq \mathrm{Isom}(\mathbb{U}_\Delta)_{\{A\}}$.

SLUTSKY démontre que $\forall A,B \subseteq U_\Delta$, $\langle G_A, G_B \rangle = G_{A\cap B}$ où $G = \mathrm{Isom}(U_\Delta)$.

Preuve de l'unicité de U_Δ :

Soient X, Y Δ-espaces métriq dénombrables qui sont ultrahomogènes et universels.
Construisons une isométrie surjective $\varphi : X \to Y$ par va et vient.

$X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\quad Y = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. On construit une suite d'isométries partielles

$\varphi_n : A_n \to B_n$ avec $A_n \subseteq A_{n+1}$ finis, $B_n \subseteq B_{n+1}$ finis, φ_{n+1} étend φ_n

et $\{x_0, \dots, x_n\} \subseteq A_n$
$\{y_0, \dots, y_n\} \subseteq B_n$

<u>$n=0$:</u> $\varphi_0 : x_0 \mapsto y_0$. $A_0 = \{x_0\}$ $\quad B_0 = \{y_0\}$.

Si φ_n est construite : OPS $x_{n+1} \notin A_n$ et $y_{n+1} \notin B_n$.

$A_n \cup \{x_{n+1}\}$ est un Δ-e.m. il se plonge isométriquement dans Y. $g : A_n \cup \{x_{n+1}\} \to Y$
universalité de Y

Soit y'_{n+1} l'image de x_{n+1}
B'_n l'image de A_n

B_n et B'_n sont isométriques. Donc $\exists f \in \mathrm{Isom}(Y)$ tq $f|_{B_n} = g \circ \varphi_n^{-1}$.

On pose $\varphi_{n+1}(x_{n+1}) = f^{-1}(y'_{n+1})$. $\quad$ (va). $\quad$ ultrahomogénéité de Y.

Pour (vient) : on fait la même chose dans l'autre sens. $\blacksquare$

<u>III.2) Construction de Katětov.</u>

Une Δ-f° de Katětov sur un espace métrique X est $f : X \to \Delta$ tq $\forall x, y \in X$

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x,y) \leq f(x) + f(y).$$

<u>Remarque</u> : $X \sqcup \{f\}$ forme un espace métrique où $d(x,f) = f(x)$.

Lemme : $\mathbb{U}_\Delta$ est l'uniq Δ espace métrique dénombrable tq $\forall A \subseteq \mathbb{U}_\Delta$ fini et
$\forall f : A \to \Delta$ f° de Katětov, $\exists x \in \mathbb{U}_\Delta$, $f = d(x, \cdot)$.

$\uparrow$
Propriété de Δ-Urysohn.

Preuve : Si X espace Δ-métrique dénombrable avec ultrahomogénéité + universalité

Soit $A \subseteq X$ fini et $f : A \to \Delta$ f° de Katětov. $A \sqcup \{f\}$ est un espace Δ-métrique fini, donc il se plonge dans X. Notons $\{b_1, \dots, b_n, z\}$ une telle copie, avec

$\varphi : a_i \mapsto b_i$ isométrie, et $d(z, b_i) = f(a_i)$.

φ s'étend en $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Isom}(X)$. Soit $x = \tilde{\varphi}^{-1}(z)$. Alors

$$\begin{aligned} d(x, a_i) &= d(\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(a_i)) \\ &= d(z, b_i) \\ &= f(a_i). \end{aligned}$$

Donc f est réalisé.

Si X vérifie la propriété d'Urysohn.

- universalité : A espace Δ-métrique fini. $A = \{a_k \mid 0 \leq k \leq n\}$

  On envoie a_0 sur $x_0 \in X$.

  Supposons qu'on ait construit $\varphi_k : \{a_0, \dots, a_k\} \to X$. Soit $B_k = \varphi_k\{a_0, \dots, a_k\}$.

La fonction $\begin{aligned} B_k &\to \Delta \\ b &\mapsto d(a_{k+1}, \varphi_k^{-1}(b)) \end{aligned}$ est une Δ f° de Katětov.

Donc $\exists b_{k+1} \in X$ tq $d(a_{k+1}, \varphi_k^{-1}(b)) = d(b_{k+1}, b)$.

Posons $\varphi_{k+1}(a_{k+1}) = b_{k+1}$.

• ultrahomogénéité : Soit $\varphi : A \to B$ isométrie, $A, B \subseteq X$ fini. On va étendre φ en $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Isom}(X)$ par va et vient $X \setminus A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $Y \setminus B = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

On va construire $\varphi_n : A_n \to B_n$ isométrie avec φ_{n+1} étend φ_n

et $A_n \supseteq A \cup \{x_0, \dots, x_n\}$

$B_n \supseteq B \cup \{y_0, \dots, y_n\}$.

Si φ_n est construite : la fonction $\begin{aligned} A_n &\to \Delta \\ a &\mapsto d(x_{n+1}, \varphi_n(a)) \end{aligned}$ est une f° de Katětov

donc $\exists z \in X$ tq $\forall a \in A_n$, $d(z, a) = d(x_{n+1}, \varphi_n(a))$.

on pose $\varphi_{n+1}(x_{n+1}) = z$ (va)

vient : idem ☒

<u>Construction de $\mathbb{U}_\Delta$:</u>

Soit X un Δ-e.m. dénombrable. Soit $E_\Delta(X, \omega)$ l'ensemble des f° de Katětov

$f : X \to \Delta$ telle que $\exists Y \subseteq X$ fini

$$f(x) = \min_{y \in Y} \{ f(y) + d(x, y) \}.$$

$E_\Delta(X, \omega)$ est un ens dénombrable.

Pour $f, g \in E_\Delta(X, \omega)$, on définit $d(f, g) = \sup\{ |f(x) - g(x)| \,/\, x \in X \}$.

Bien défini car $\forall x, x_0 \in X$, $|f(x) - d(x, x_0)| \leq f(x_0)$

$|g(x) - d(x, x_0)| \leq g(x_0)$

et donc $d(f, g) \leq f(x_0) + g(x_0) < +\infty$.

Fait : $E_\Delta(X,\omega)$ est un Δ e.m. dénombrable.

<u>Preuve :</u> $d(f,g) = \sup\{|f(y) - g(y)| \ y \in Y\}$. où Y est un support pour f et g.
fini

<u>Fait :</u> (i) $\begin{cases} X \to E_\Delta(X,\omega) & \text{plongement isométrique} \\ x \mapsto d(x,\cdot) \end{cases}$

(ii) $\mathrm{Isom}(X) \to \mathrm{Isom}(E_\Delta(X,\omega))$ un morphisme continu
$\varphi \longmapsto (f \mapsto f \circ \varphi^{-1})$ plongements de gpes topologiques.

On part de X_0 = espace métrique vide.

$$X_{n+1} = E_\Delta(X_n, \omega).$$

On identifie X_n à un sous-espace de X_{n+1}. Soit $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. espace Δ-métrique dénombrable. Mq X vérifie la propriété d'Urysohn.

Soit $A \subseteq X$ fini, $f : A \to \Delta$ Katětov. Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $A \subseteq X_n$.

Soit $\tilde{f}(x) = \min_{y\in A}\{f(y) + d(x,y)\} \in E_\Delta(X_n,\omega) = X_{n+1}$.

Si $y \in A$, $d_{X_{n+1}}(\tilde{f}, d(y,\cdot)) = \sup_{x\in X_n}\{|\tilde{f}(x) - d(y,x)|\}$

$\leq \tilde{f}(y) + d(y,y)$

Donc $d(\tilde{f}, d(y,\cdot)) = f(y)$

Donc f est réalisée. Donc X vérifie la propriété d'Urysohn.

Donc $X = \mathbb{U}_\Delta$.

Lemme: Soit Δ ens. de distance avec $\Delta = \bigcup^{\nearrow} \Delta_n$ ens. de distance.

Soit $X = \mathbb{U}_\Delta$. Alors on peut écrire $X = \bigcup^{\nearrow} X_n$ avec $X_n = \mathbb{U}_{\Delta_n}$ tq pour tout $n \in \mathbb{N}$, toute isométrie de X_n s'étend en une isométrie de X_{n+1} de sorte que $\mathrm{Isom}(X_n) \to \mathrm{Isom}(X_{n+1})$ plongement de groupes top. et tq $\bigcup^{\nearrow} \mathrm{Isom}(X_n)$ sous-groupe dense de $\mathrm{Isom}(\mathbb{U}_\Delta)$.

Preuve: On construit d'abord $X_0 = \mathbb{U}_{\Delta_0}$ avec la construction de Katětov.

On part de X_0, on applique la construction de Katětov pour Δ_1

on obtient $X_1 = \mathbb{U}_{\Delta_1} \supseteq \mathbb{U}_{\Delta_0} = X_0$

et un plongement $\mathrm{Isom}(X_0) \to \mathrm{Isom}(X_1)$.

On montre que $\bigcup X_n = X$ vérifie la propriété d'Urysohn pour Δ. Donc $X = \mathbb{U}_\Delta$.

Pour la densité de $\bigcup^{\nearrow} \mathrm{Isom}(X_n)$ dans $\mathrm{Isom}(X)$:

Soit $A \subseteq X$ fini. Soit $g \in \mathrm{Isom}(X)$. Trouvons $g' \in \bigcup^{\nearrow} \mathrm{Isom}(X_n)$ tq $g'|_A = g|_A$. APCR, $A \cup g(A) \subseteq X_n$, $g|_A$ est une isométrie partielle de $X_n = \mathbb{U}_{\Delta_n}$ donc g s'étend en une isométrie g' de $\mathbb{U}_{\Delta_n}$ et elle coïncide avec g sur A. ▨

III.3) Représentation unitaires de $\mathrm{Isom}(\mathbb{Q}\mathbb{U})$.

Définition: $G \leqslant_f \mathrm{Sym}(\Omega)$ est oligomorphe si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'action diagonale $G \curvearrowright \Omega^n$ n'admet qu'un nombre fini d'orbites.

Exemples: $\mathrm{Sym}(\Omega)$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$, $\mathrm{Isom}(\mathbb{U}_\Delta)$ lorsque Δ est fini.

Théorème [TSANKOV, 2012]

$G \leq_f \mathrm{Sym}(\Omega)$ oligomorphe avec peu de SGO. Soit $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ rep. uni. Alors $\pi = \bigoplus_{i \in I} \pi_i$, π_i irréductible, avec $\pi_i = \mathrm{Ind}_{G_{\{A_i\}}}^{G} (\sigma_i)$, où $A_i \subseteq \Omega$ fini, $\sigma_i : G_{\{A_i\}} \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_i)$ triviale sur G_{A_i}.

En particulier, toute rep. uni de G oligomorphe + peu de SGO est dissociée.

Remarque : si Δ est infini, $\mathrm{Isom}(\mathbb{U}_\Delta)$ n'est pas oligomorphe.

Théorème [BJJ 24] :

Δ ens. de distance. Soit $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{U}_\Delta)$. Soit $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ rep. uni. Alors $\pi = \bigoplus \pi_i$, où $\pi_i = \mathrm{Ind}_{G_{\{A_i\}}}^{G} (\sigma_i)$ avec $A_i \subseteq \mathbb{U}_\Delta$ fini et $\sigma_i : G_{\{A_i\}} \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_i)$ irréductible, triviale sur G_{A_i}, ie rep. irréd du groupe fini $\mathrm{Isom}(A_i)$.

Preuve : Supposons Δ infini. On écrit $\Delta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}^{\uparrow} \Delta_n$, Δ_n ens. de distance finis : soit $\{\delta_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ une énumération de Δ avec $\delta_0 = 0$.

$\Delta_n = [0, \max\{\delta_0, \ldots, \delta_n\}] \cap$ semi groupe engendré par $\delta_0, \ldots, \delta_n$.

fini. Écrivons $X = \mathbb{U}_\Delta$, $X = \bigcup^{\uparrow} X_n$ avec $X_n = \mathbb{U}_{\Delta_n}$ et

$$\mathrm{Isom}(X_n) \hookrightarrow \mathrm{Isom}(X_{n+1}) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}}^{\uparrow} \mathrm{Isom}(X_n) \hookrightarrow \mathrm{Isom}(X)$$

image dense. $\mathrm{Isom}(X) = \mathrm{Isom}(\mathbb{U}_\Delta) = G$

par le lemme.

Soit $G_n = \mathrm{Isom}(X_n) \leq_f \mathrm{Sym}(X_n)$. On sait que G_n est oligomorphe et a peu de SGO.

Soit $\pi : \mathrm{Isom}(\mathbb{U}_\Delta) \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ rep. uni. Alors [TSANKOV]

$\pi|_{G_n}$ est dissociée. Pour $A \subseteq X_n$, si p_A^n est la proj $\perp$

sur $\mathcal{H}_A^n = \mathcal{H}^{(G_n)_A}$, $\quad p_A^n p_B^n = p_{A\cap B}^n$.

<u>Fait</u>: $p_A^n \longrightarrow p_A$ pour la topologie d'opérateur fort ($\|p_A^n\xi - p_A\xi\| \to 0$ $\forall \xi \in \mathcal{H}$).

<u>Preuve</u>: APCR $A \subseteq X_n$. Comme $(G_n)_A$ croissant et dense dans G_A,

$\mathcal{H}_A^n \searrow$ et par densité $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_A^n = \mathcal{H}_A$.

Par convergence décroissante, $p_A^n \to p_A$ opérateur fort $\boxed{\equiv}$

Si $A, B \subseteq \mathbb{U}_\Delta$ fini, $\quad p_A^n p_B^n \longrightarrow p_A p_B$ car $\|p_A^n\|, \|p_B^n\| \leq 1$.

$$\begin{aligned}
\|p_A^n p_B^n \xi - p_A p_B \xi\| &\leq \|p_A^n p_B^n \xi - p_A^n p_B \xi\| \\
&\quad + \|p_A^n p_B \xi - p_A p_B \xi\| \\
&\leq \|p_B^n \xi - p_B \xi\| + \|p_A^n p_B \xi - p_A p_B \xi\| \\
&\longrightarrow 0
\end{aligned}$$

Donc $p_A p_B = p_{A\cap B}$ et π est dissociée. $\boxed{\equiv}$