Partie II : Classification des représentations unitaires dissociées.

II. 1) Représentation induite.

G gpe top. $H \leq G$ sous gpe ouvert. $\sigma : H \to \mathcal{U}(\mathcal{K})$. On définit

$$\mathcal{E} = \{ f : G \to \mathcal{K} \mid \forall g \in G, \forall h \in H \quad f(gh) = \sigma(h^{-1}) f(g) \}.$$

Pour $f \in \mathcal{E}$, l'applicaO $g \mapsto \|f(g)\|$ est constante sur chaque classe G/H.

$\|f(q)\|$ la valeur en $q \in G/H$. Soit

$$\mathcal{H} = \{ f \in \mathcal{E} \mid \sum_{q \in G/H} \|f(q)\|^2 < +\infty \}.$$

c'est un Hilbert. $\langle f_1 | f_2 \rangle = \sum_{i \in I} \langle f_1(g_i) \mid f_2(g_i) \rangle$ où (g_i) système de représentants de G/H.

La représentation de G induite par σ, notée $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ est la rep. uni. définie par

$$\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)(g) f : x \mapsto f(g^{-1}x) \qquad \forall f \in \mathcal{H}, g \in G.$$

Exemple : si $\sigma = 1_H$ est la rep. triviale de H, alors $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma) \simeq \ell^2(G/H)$ la rep. quasi régulière.

Fait : Soit $\mathcal{H}_0 = \{ f \in \mathcal{H} \mid \mathrm{supp}(f) \subseteq H \}$. Alors $\mathcal{H}_0$ est H-inv et la rep. de H sur $\mathcal{H}_0$ est $\simeq$ à σ.

Remarque : Soit $G \leq_f \mathrm{Sym}(\Omega)$ avec peu de SGO (ie si $V \leq_o G$ $\exists !$ $A \subseteq \Omega$ fini tq $G_A \leq V \leq G_{\{A\}}$). Alors pour tout $A \subseteq \Omega$ fini, $G_A \curvearrowright \Omega \setminus A$ n'a pas d'orbite finie.

Lemme : Soit $G \leq_f \mathrm{Sym}(\Omega)$ avec peu de SGO. Soit $A \subseteq \Omega$ fini, soit $\sigma : G_{\{A\}} \to \mathcal{U}(K)$, une rep. uni. triviale sur G_A. Soit $\pi = \mathrm{Ind}_{G_{\{A\}}}^{G}(\sigma)$. Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert sous-jacent. Alors

(i) $\forall B \subseteq \Omega$ fini, $\mathcal{H}_B := \mathcal{H}^{G_B} = \{ f \in \mathcal{H} \mid \mathrm{supp}(f) \subseteq \{ g \in G \mid gA \subseteq B \} \}$.

(ii) $\forall B \subseteq \Omega$ fini P_B est la multiplication par $\mathbb{1}_{\{g \in G \mid gA \subseteq B\}}$.

Preuve :

(i) Soit $f \in \mathcal{H}_B$. L'application $g \mapsto \|f(g)\|$ est constante sur les doubles classes $G_B g G_{\{A\}}$. Comme $\|f\|^2 = \sum_{g \in G/G_{\{A\}}} \|f(g)\|^2 < +\infty$.

Donc pour tout $g \in \mathrm{supp}(f)$, $G_B g G_{\{A\}}$ est union finie de $G_{\{A\}}$-classes à gauche. $G_B g G_{\{A\}} = \bigsqcup_{i=1}^{n} h_i G_{\{A\}}$.

$\forall a \in A$, $G_B g(a) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} h_i G_{\{A\}}(a)$ qui est fini.

donc $g(a) \subseteq B$. donc $gA \subseteq B$.

Réciproquement, si $f \in \mathcal{H}$ tq $\mathrm{supp}(f) \subseteq \{ g \in G \mid gA \subseteq B \}$.
soit $h \in G_B$, $g \in G$ et mq $f(h^{-1}g) = f(g)$.

- si $gA \not\subseteq B$, $h^{-1}gA \not\subseteq B$ donc $f(h^{-1}g) = 0 = f(g)$.
- si $gA \subseteq B$, $h^{-1}g \in G_B g = g G_{g^{-1}B} \subseteq g G_A$.

écrivons $h^{-1}g = gk$ avec $k \in G_A$.

$$f(h^{-1}g) = f(gk) = \sigma(k^{-1}) f(g) = f(g).$$

Donc $\mathcal{H}_B = \{ f \in \mathcal{H} \mid \mathrm{supp}(f) \subseteq \{ g \mid gA \subseteq B \} \}$.

(ii) P_B projection $\perp$ sur $\mathcal{H}_B$.

Soit $f \in \mathcal{H}$, $f' \in \mathcal{H}_B$.

$$\|f - f'\|^2 = \sum_{q \in G/G_{\{A\}}} \|(f-f')(q)\|^2 \geq \sum_{\substack{q \in G/G_{\{A\}} \\ q \cap \{g \mid gA \subseteq B\} = \emptyset}} \|f\|^2$$

avec égalité ssi $f' = f \mathbb{1}_{\{g \mid gA \subseteq B\}}$.

$$P_B = \cdot\, \mathbb{1}_{\{\ldots\}}.$$

$\blacksquare$

Définition : $G \leq_f \mathrm{Sym}(\Omega)$. $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$. π est dissocié si $\forall A, B \subseteq \Omega$ finis, $\mathcal{H}_A \underset{\mathcal{H}_{A\cap B}}{\perp} \mathcal{H}_B$.

Corollaire: $\pi = \mathrm{Ind}_{G_{\{A\}}}^{G}(\sigma)$ avec σ trivial sur G_A est dissocié.

Preuve: $B, C \subseteq \Omega$ finis.

$$P_B P_C = \text{multiplication par } \mathbb{1}_{\{g \mid gA \subseteq B\}} \mathbb{1}_{\{g \mid gA \subseteq C\}} = \mathbb{1}_{\{g \mid gA \subseteq B \cap C\}}$$

$= P_B \cap C$

Lemme : $\pi = \mathrm{Ind}_{G_{\{A\}}}^{G}(\sigma)$ avec σ triviale sur G_A. Alors π est irréductible ssi σ l'est.

Preuve : Si $\sigma = \sigma_1 \oplus \sigma_2$ alors $\mathrm{Ind}_{G_{\{A\}}}^{G}(\sigma) = \mathrm{Ind}(\sigma_1) \oplus \mathrm{Ind}(\sigma_2)$.

Si σ est irréd. Soit $f \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$. Mq $\overline{\mathrm{Vect}(\pi(G) \cdot f)} = \mathcal{H}$.

QPS $f(e_G) \neq 0$. Par le lemme précédent, $P_A f = f \mathbb{1}_{G_{\{A\}}} \neq 0$.

Puisque σ est irréductible $\overline{\mathrm{Vect}(\pi(G_{\{A\}}) P_A f)} = \{f \in \mathcal{H} \mid \mathrm{supp}(f) \subseteq G_{\{A\}}\}$
$= \mathcal{H}_A$.

donc $\overline{\mathrm{Vect}(\pi(G) P_A f)} = \mathcal{H}$.

Mais (ALAOGLU, BIRKHOFF) $P_A f \in \overline{\mathrm{Conv}(\pi(G_A) f)}$ et en fait, c'est le vecteur de plus petite norme dans

donc $\overline{\mathrm{Vect}(\pi(G) f)} = \mathcal{H}$.

II.2) Une dissociée contient une induite.

Lemme : $G \leq_f \mathrm{Sym}(\Omega)$ $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$. Alors $\bigcup_{A \subseteq \Omega \text{ fini}} \mathcal{H}_A$ dense dans $\mathcal{H}$.

Preuve : Soit $\xi \in \mathcal{H}$, $\varepsilon > 0$. Par continuité de π, il existe $A \subseteq \Omega$ fini tq $\|\pi(g)\xi - \xi\| \leq \varepsilon$ $\forall g \in G_A$.

Soit $C = \overline{\mathrm{Conv}}(\pi(G_A)\xi) \subseteq \overline{B}(\xi, \varepsilon)$. $\pi(G_A) C = C$.

Soit $\eta \in C$ l'uniq élément de norme minimale, $\pi(G_A)\eta = \eta$ ie $\eta \in \mathcal{H}_A$, et $\|\eta - \xi\| \leq \varepsilon$. $\square$

Lemme: $G \leq_f \mathrm{Sym}(\Omega)$, $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ rep. uni. Si π est dissociée, alors π contient une sous rep. de la forme $\mathrm{Ind}_{G_{\{A\}}}^{G}(\sigma)$ avec $A \subseteq \Omega$ fini, $\sigma : G_{\{A\}} \to \mathcal{U}(K)$ triviale sur G_A.

Remarque: $A \subseteq \Omega$ fini, $G_A \trianglelefteq G_{\{A\}}$ et $G_{\{A\}}/G_A$ est fini.

Preuve: $\bigcup_{A \subseteq \Omega \text{ fini}} \mathcal{H}_A$ est dense dans $\mathcal{H}$, donc soit $A \subseteq \Omega$ fini de cardinal minimal tq $\mathcal{H}_A \neq \{0\}$. $\mathcal{H}_A$ est G_A-inv. et même $G_{\{A\}}$-inv: en effet si $\xi \in \mathcal{H}_A$, $g \in G_{\{A\}}$, $h \in G_A$

$$\pi(h)\pi(g)\xi = \pi(g)\pi(h)\xi = \pi(g)\xi.$$

et $G_A \curvearrowright \mathcal{H}_A$ est triviale. Soit $\sigma : G_{\{A\}} \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_A)$. Mq π contient comme sous rep $\mathrm{Ind}_{G_{\{A\}}}^{G}(\sigma)$.

Fait: $\forall g, h \in G$, $h^{-1}g \notin G_{\{A\}} \Rightarrow \pi(g)\mathcal{H}_A \perp \pi(h)\mathcal{H}_A$.

Preuve du fait: il suffit de le mq pour $g \notin G_{\{A\}}$ et $h = e_G$.

$\pi(g)\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_{gA}$. Donc par dissociation $\mathcal{H}_{gA} \underset{\mathcal{H}_{gA\cap A}}{\perp} \mathcal{H}_A$.

Mais $g \notin G_{\{A\}}$ et A de cardinal minimal tq $\mathcal{H}_A \neq \{0\}$.

Donc $gA \cap A \subsetneq A$ Donc $\mathcal{H}_{gA\cap A} = \{0\}$.

Soit $\mathcal{K}$ l'espace de Hilbert sous-jacent à $\mathrm{Ind}_{G_{\{A\}}}^{G}(\sigma)$.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{K} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ f &\longmapsto \sum_{i \in I} \pi(g_i) f(g_i) \end{aligned}$$

où $(g_i)_{i \in I}$ forme un système de représentants de $G / G_{\{A\}}$.

<u>Fait:</u> φ est bien définie, isométrie, G-éq.

<u>Preuve:</u> Si $g_i' = g_i h_i$ avec $h_i \in G_{\{A\}}$, alors

$$\pi(g_i') f(g_i') = \pi(g_i') \sigma(h_i^{-1}) f(g_i) = \pi(g_i' h_i^{-1}) f(g_i) = \pi(g_i) f(g_i).$$

<u>Isométrie:</u> $\|\varphi(f)\|^2 = \sum_{i \in I} \|\pi(g_i) f(g_i)\|^2 = \sum_{i \in I} \|f(g_i)\|^2 = \|f\|^2$.

G-équivariant: $\varphi(g \cdot f) = \sum_{i \in I} \pi(g_i) f(g^{-1} g_i)$.

$$\begin{aligned} &= \sum_{i \in I} \pi(g) \pi(g^{-1} g_i) f(g^{-1} g_i). \\ &= \pi(g) \sum_{i \in I} \pi(g^{-1} g_i) f(g^{-1} g_i) \\ &= \pi(g) \varphi(f). \end{aligned}$$

Lemme: la dissociation passe aux sous-rep.

Preuve: $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ dissociée, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ sous rep.

$A, B \subseteq \Omega$ fini $\quad p_A, p_B, p_{A \cap B} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \qquad q_A, q_B, q_{A \cap B} \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$.

Fait : $\forall \xi \in \mathcal{K}$, $q_A \xi = p_A \xi$ et idem pour B, $A \cap B$.

Preuve : ALAOGLU BIRKHOFF, $p_A \xi$ est l'uniq élément de norme minimale dans $\overline{\mathrm{Conv}}(\pi(G_A)\xi)$; idem pour $q_A \xi$. $\square$

Comme $p_A p_B = p_{A \cap B}$ on obtient que $q_A q_B = q_{A \cap B}$.

Théorème [BJJ 24] : Soit $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ avec peu de SGO. Alors les rep. uni. dissociées irréductibles de G sont exactement les $\mathrm{Ind}_{G_{\{A\}}}^{G}(\sigma)$ avec $A \subseteq \Omega$ fini, $\sigma : G_{\{A\}} \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ irréductible, triviale sur G_A.
Par ailleurs, toute rep. uni. dissociée de G est somme directe d'irréductibles.

Preuve : irréd OK.

Soit π rep. uni. dissociée. Soit une sous-rep. isomorphe à $\mathrm{Ind}_{G_{\{A\}}}^{G}(\sigma)$

σ est une rep du gpe fini $G_{\{A\}}/G_A$. Une telle rep s'écrit comme une somme directe d'irréductible. Donc OPS σ est irred, donc $\mathrm{Ind}_{G_{\{A\}}}^{G}(\sigma)$ l'est aussi.

Zorn permet de conclure. $\square$

Partie III : Représentations unitaires de $\mathrm{Isom}(\mathbb{U})$.

III.1) Espaces métriques d'Urysohn.

<u>Définition</u> : Un ensemble de distance est

- soit un sous-monoïde dénombrable de $(\mathbb{R}_+, +)$.
- soit l'intersection d'un tel sous-monoïde de M et d'un intervalle $[0,d]$ avec $d \in M$.

Soit Δ un ens. de distance. Un Δ-espace métrique est un espace métrique (X,d) avec $d(X \times X) \subseteq \Delta$.

Le <u>Δ-espace d'Urysohn</u>, $\mathbb{U}_\Delta$ est l'unique Δ-espace métrique dénombrable tq

- (ultrahomogène) $\forall A, B \subseteq \mathbb{U}_\Delta$ finis, $\forall f : A \to B$ isométrie surjective.
  $\exists \tilde{f} \in \mathrm{Isom}(\mathbb{U}_\Delta)$ tq $\tilde{f}|_A = f$.
- (universalité) tout Δ-espace métrique fini (ou dénombrable) se plonge isométriquement dans $\mathbb{U}_\Delta$.

$\mathrm{Isom}(\mathbb{U}_\Delta) \leq_f \mathrm{Sym}(\mathbb{U}_\Delta)$.

Exemples :

- Si $\Delta = \{0, d\}$. alors $\mathbb{U}_\Delta$ est isométrique à $\mathbb{N}$ muni de la distance discrète $d(x,y) = d$ si $x \neq y$. $\mathrm{Isom}(\mathbb{U}_\Delta) = \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$.
- Si $\Delta = \{0, d, 2d\}$. alors $\mathbb{U}_\Delta$ est isométrique au graphe de Rado R, muni de la métrique où deux sommets adjacents sont à distance d.

- Si $\Delta = \mathbb{Q}_+$, alors $\mathbb{U}_\Delta = \mathbb{Q}\mathbb{U}$ est l'espace d'Urysohn rationnel
- — $\Delta = \mathbb{Z}_+$, — $\mathbb{U}_\Delta = \mathbb{Z}\mathbb{U}$ —————— entier.
- — $\Delta = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, — $\mathbb{U}_\Delta = \mathbb{Q}\mathbb{U}_1$ — la sphère d'Urysohn rationnelle.