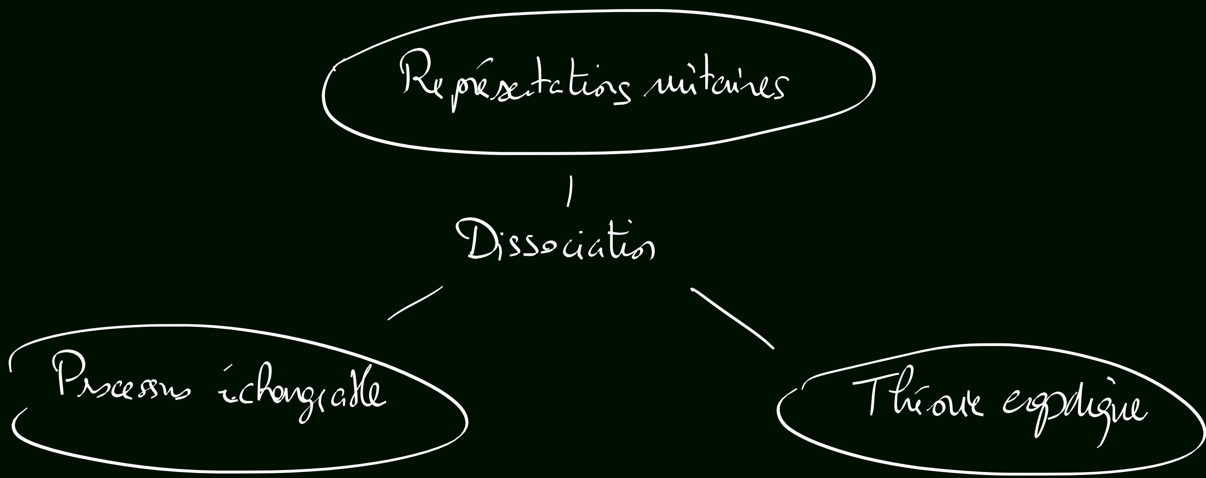
GdT

Théorie ergodique

Représentations unitaires des groupes polonais non-archimédiens.

[JJ23] JAHEL, J.

[BJJ24] BARRITAULT, JAHEL, J.



Problématiques : M structure (ex. graphe, ordre, espace métrique ...) sur un ens. dénombrable Ω. $G = \mathrm{Aut}(M) \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$

1) Classifier les représentations unitaires continues $G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$.

2) Classifier les mesures de proba G-invariantes ergodiques sur $[0,1]^{\Omega}$.

3) "Classifier" les actions préservant une mesure de proba erg. $G \curvearrowright (X, \mu)$

Partie I : la dissociation : définition et conséquences.

I.1) Groupes polonais non-archimédiens.

$M = (\Omega, (R_i)_{i \in I})$ est une structure relationnelle dénombrable :

- Ω ens dénombrable.
- $(R_i)_{i \in I}$ famille dénombrable de relations : $R_i \subseteq \Omega^{r_i}$, $r_i \in \mathbb{N}^*$ appelé l'arité de R_i.

$\mathrm{Aut}(M)$: l'ens des bijections $f : \Omega \to \Omega$ tq $\forall i \in I$, $\forall x_1, \dots, x_{n_i} \in \Omega$,

$$(x_1, \dots, x_{n_i}) \in R_i \Longleftrightarrow (f(x_1), \dots, f(x_{n_i})) \in R_i.$$

$$\mathrm{Aut}(M) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fermé}}}{\leq} \mathrm{Sym}(\Omega) \subseteq \Omega^\Omega$$

Exemples:

- $M = (\Omega, \emptyset) \rightsquigarrow \mathrm{Aut}(M) = \mathrm{Sym}(\Omega)$
- $M = (\mathbb{Q}, <) \rightsquigarrow \mathrm{Aut}(M) = \{f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \text{ bijection croissante}\}$.

Exercice : Si $G \leq_f \mathrm{Sym}(\Omega)$ alors $\exists M$ tq $G = \mathrm{Aut}(M)$

Déf : G gpe topologique est

- polonais si séparable et admet une distance compatible qui est complète.
- non-archimédien : s'il admet une base de vois. de e_G formée de sous-groupes ouverts.

Si $G \leq_f \mathrm{Sym}(\Omega)$, G est polonais et non-archimédien : pour tout $A \subseteq \Omega$ fini le stabilisateur ponctuel de A dans G

$$G_A := \{g \in G \mid \forall a \in A,\ g(a) = a\}. \quad \text{ss gpe ouvert}$$

forment une base de vois. de e_G.

Théorème [BECKER-KECHRIS]

G top. est polonais non-archimédien ssi G est isomorphe (comme gpe top.) à un ss groupe fermé de $\mathrm{Sym}(\Omega)$, Ω dénombrable.

Définition : $G \leq_f \mathrm{Sym}(\Omega)$ a peu de sous-groupes ouverts si pour tout $V \leq G$ ouvert, il existe un unique $A \subseteq \Omega$ fini tq

$$G_A \leq V \leq G_{\{A\}}$$

$\uparrow$ stabilisateur ensembliste $= \{ g \in G \,/\, g(A) = A \}$.

(en théorie des modèles $\iff$ G n'a pas d'algébricité et élimine faiblement les imaginaires)

Exercice : $G \leq_f \mathrm{Sym}(\Omega)$ tq $G \curvearrowright \Omega$ n'a pas de pt fixe. Alors G a peu de SGO ssi $\forall A, B \subseteq \Omega$ fini $\langle G_A, G_B \rangle = G_{A \cap B}$.

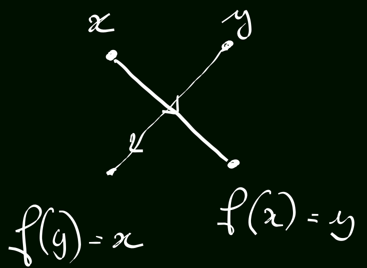
(critère très utile)

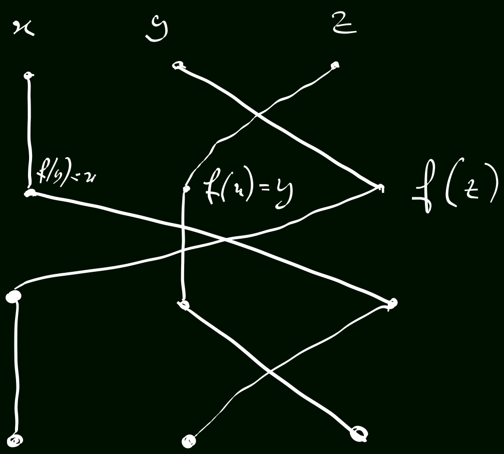
Exercice : $G = \mathrm{Sym}(\Omega)$ a peu de SGO.

exemple avec $A = \{x\}$, $B = \{y\}$. Mq $x \neq y \Rightarrow \langle G_x, G_y \rangle = G$.

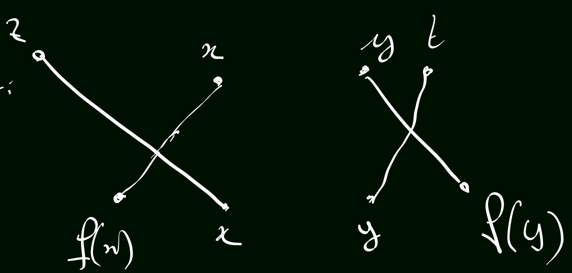
Soit $f \in G$.

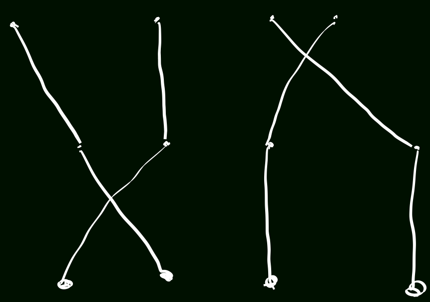
Cas n°1 :





Cas n°2 :





Autres exemples :

- $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ a peu de SGO [TRUSS]
- $\mathrm{Isom}(\mathbb{Q}U)$ a peu de SGO.
- $\mathrm{Aut}(R)$ a peu de SGO où R est le graphe de Rado.

I.2) Dissociation

$\mathcal{H}$ espace de Hilbert complexe séparable. $\mathcal{U}(\mathcal{H}) = \{$opérateurs unitaires$\}$. Topologie sur $\mathcal{U}(\mathcal{H})$: topologie initiale associée aux fonctions $\begin{array}{rcl} \mathcal{U}(\mathcal{H}) & \to & \mathcal{H} \\ T & \mapsto & T\xi \end{array}$, $\forall \xi \in \mathcal{H}$.

Une représentation unitaire d'un gpe top. G est un morphisme continu $G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$.

Exemples: $G \le_f \mathrm{Sym}(\Omega)$. Soit $V \le G$ ouvert. $[G : V]$ est au plus dénombrable. La représentation quasi régulière associée est la rep. $\pi : G \to \mathcal{U}(\ell^2(G/V))$

$$\pi(g) f : hV \mapsto f(g^{-1}hV).$$

Soit $G \le_f \mathrm{Sym}(\Omega)$ et $A \subseteq \Omega$ fini. Soit $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$. On définit

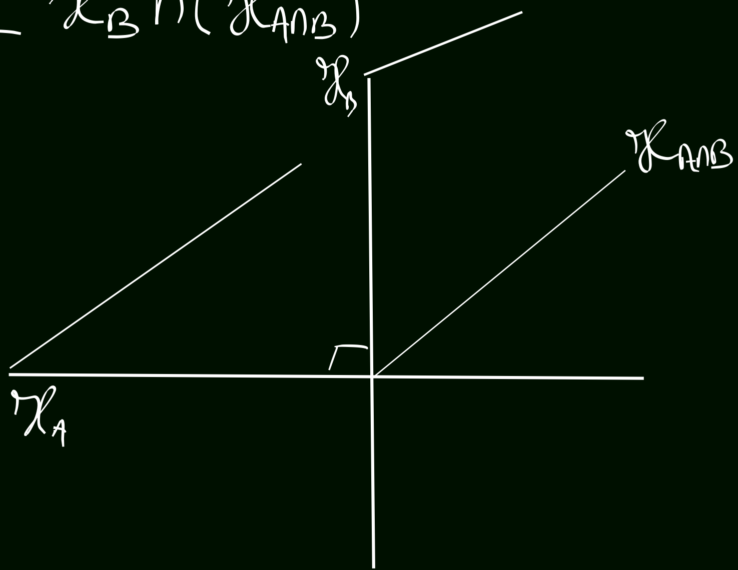
$$(\mathcal{H}^{G_A} =) \mathcal{H}_A := \{\xi \in \mathcal{H} \mid \forall g \in G_A, \pi(g)\xi = \xi\}.$$

Définition : $G \le_f \mathrm{Sym}(\Omega)$. Une rep. uni. $G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ est dissociée si $\forall A, B \subseteq \Omega$ fini, on a

$$\mathcal{H}_A \cap (\mathcal{H}_{A\cap B})^\perp \perp \mathcal{H}_B \cap (\mathcal{H}_{A\cap B})^\perp$$

se note $\mathcal{H}_A \underset{\mathcal{H}_{A\cap B}}{\perp} \mathcal{H}_B$.

Remarque: on a toujours $\mathcal{H}_{A\cap B} \subseteq \mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_B$.



Si $A \subseteq \Omega$ fini, on note P_A la projection $\perp$ sur $\mathcal{H}_A$.

Lemme : $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ rep. uni. Alors π est dissociée ssi

$\forall A, B \subseteq \Omega$ fini, $p_A p_B = p_{A\cap B}$.

Preuve : Si $\mathcal{H}_A \cap (\mathcal{H}_{A\cap B})^\perp \perp \mathcal{H}_B \cap (\mathcal{H}_{A\cap B})^\perp$

Pour montrer $p_A p_B = p_{A\cap B}$, il suffit de mq $\forall \xi \in \mathcal{H}_B$,

$$p_A \xi = p_{A\cap B}\xi.$$

en effet, $\forall \xi \in \mathcal{H}$, $p_{A\cap B}\xi = p_{A\cap B} p_B \xi$, parce que $\mathcal{H}_{A\cap B} \subseteq \mathcal{H}_B$

Soit $\xi \in \mathcal{H}_B$, $\xi = \underbrace{\xi_1}_{\in \mathcal{H}_{A\cap B}} + \underbrace{\xi_2}_{\in (\mathcal{H}_{A\cap B})^\perp}$

$p_A \xi_2 = 0$ car $\mathcal{H}_A \cap (\mathcal{H}_{A\cap B})^\perp \perp \mathcal{H}_B \cap (\mathcal{H}_{A\cap B})^\perp$.

donc $p_A \xi = p_A \xi_1 = p_{A\cap B}\xi_1$ (car $\xi_1 \in \mathcal{H}_{A\cap B}$).

$p_{A\cap B}\xi = p_{A\cap B}\xi_1$

Autre preuve : $p_A(1 - p_{A\cap B})\, p_B(1 - p_{A\cap B}) = 0 \iff \mathcal{H}_A \underset{\mathcal{H}_{A\cap B}}{\perp} \mathcal{H}_B$.

on développe et on trouve $p_A p_B = p_{A\cap B}$ $\boxed{\xi_1}$

Lemme : $G \leq_f \mathrm{Sym}(\Omega)$ avec $G \curvearrowright \Omega$ sans pt fixe. Si toutes les rep. uni de G sont dissociées, alors G a peu de SGO.

Preuve : Mq $\langle G_A, G_B\rangle \supseteq G_{A\cap B}$. Soit $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ rep. uni dissociée.

On a toujours $\mathcal{H}^{\langle G_A, G_B\rangle} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{toujours vrai.}}}{=} \mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_B \underset{\substack{\uparrow \\ \text{utilise la dissociaQ.}}}{=} \mathcal{H}_{A\cap B}$

On a toujours $\mathcal{H}_{A\cap B} \subseteq \mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_B$.

Mais $\mathcal{H}_A \cap (\mathcal{H}_{A\cap B})^\perp \perp \mathcal{H}_B \cap (\mathcal{H}_{A\cap B})^\perp \Rightarrow$ égalité.

Soit $\pi : G \to \mathcal{U}(\ell^2(G/\langle G_A, G_B\rangle))$. elle est dissociée.

$$\xi = \mathbb{1}_{\langle G_A, G_B\rangle} \in \mathcal{H}^{\langle G_A, G_B\rangle} = \mathcal{H}_{A\cap B}.$$

et $\pi(g)\,\xi = \xi \iff g \in \langle G_A, G_B\rangle$

Donc $G_{A\cap B} \subsetneq \langle G_A, G_B\rangle$ $\boxed{\S}$

Théorème principal [BJJ 24] :

Soit $G \leq_f \mathrm{Sym}(\Omega)$ avec peu de SGO. Soit $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ rep uni dissociée. Alors π est isomorphe à une somme directe $\bigoplus_{i\in I} \pi_i$ où pour tout i, π_i est une sous-représentation irréductible (les seuls sev invariants sont $\{0\}$ et $\mathcal{H}_i$) d'une représentation quasi régulière $\ell^2(G/G_A)$.

I.3) Conséquences ergodiques

G gpe top. Une action p.m.p. (ou spatiale) de G sur (X,μ) est une action boréliene $G \curvearrowright X$, X borélien standard muni de μ mes. de proba boréliene G-inv.

Pour $G \leq_f \mathrm{Sym}(\Omega)$, $G \curvearrowright (X,\mu)$ p.m.p, $A \subseteq \Omega$ fini.

$$\mathcal{F}_A = \{ Z \subseteq X \text{ borélien tq } \forall g \in G_A,\ \mu(gZ \,\Delta\, Z) = 0 \}.$$

sous-tribu de $\mathcal{B}(X)$.

Définition : $G \leq_f \mathrm{Sym}(\Omega)$. Une action pmp $G \curvearrowright (X,\mu)$ est dissociée si $\forall A, B \subseteq \Omega$ finis,
$$\mathcal{F}_A \underset{\mathcal{F}_{A\cap B}}{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{F}_B.$$

Si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ sont tribus. Alors $\mathcal{F}_1 \underset{\mathcal{F}_2}{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{F}_3$ si pour tout $f_1 \in L^1(X, \mathcal{F}_1, \mu)$
$f_3 \in L^1(X, \mathcal{F}_3, \mu)$

$$\mathbb{E}[f_1 f_3 \mid \mathcal{F}_2] = \mathbb{E}[f_1 \mid \mathcal{F}_2]\,\mathbb{E}[f_3 \mid \mathcal{F}_2].$$

Critère de Doob : $\mathcal{F}_1 \underset{\mathcal{F}_2}{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{F}_3 \iff \forall f \in L^1(X, \mathcal{F}_3, \mu)$

$$\mathbb{E}[f \mid \sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)] = \mathbb{E}[f \mid \mathcal{F}_2].$$

Dans notre cas, $\mathcal{F}_{A\cap B} \subseteq \mathcal{F}_A \cap \mathcal{F}_B$ donc $\mathcal{F}_A \underset{\mathcal{F}_{A\cap B}}{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{F}_B$ se réécrit

$$\forall f \in L^1(X, \mathcal{F}_B, \mu),\quad \mathbb{E}[f \mid \mathcal{F}_A] = \mathbb{E}[f \mid \mathcal{F}_{A\cap B}]. \ (*)$$

Par densité de $L^2(X, \mathcal{F}_B, \mu)$, il suffit de mq $(*)$ pour $f \in L^2(\text{—})$.

<u>Fait</u>: Si $\mathcal{H} = L^2(X, \mu)$, alors $\mathcal{H}_B = L^2(X, \mathcal{F}_B, \mu)$.

l'égalité $(*)$ se réécrit $\forall f \in \mathcal{H}_B$, $P_A f = P_{A\cap B} f$.
se réécrit $\forall f \in \mathcal{H}$, $P_A P_B f = P_{A\cap B} f$.

<u>Lemme</u>: $G \curvearrowright (X, \mu)$ est dissociée ssi $\pi : G \to \mathcal{U}(L^2(X, \mu))$ est dissociée.

<u>Théorème</u> : Soit $G \leq_f \mathrm{Sym}(\Omega)$ tq $G \curvearrowright \Omega$ transitive.
Soit $\mu \in \mathrm{Prob}([0,1]^\Omega)$ ergodique G-invariante. Si $G \curvearrowright ([0,1]^\Omega, \mu)$
est dissociée, alors $\mu = \lambda^{\otimes \Omega}$ où $\lambda \in \mathrm{Prob}([0,1])$.

Preuve: $\forall a \in \Omega$, $\mu_a \in \mathrm{Prob}([0,1])$ la marginale de μ associée à a.

$$\mu_a = (\varphi_a)_* \mu \quad \text{où} \quad \varphi_a : \begin{array}{l} [0,1]^\Omega \to [0,1] \\ (x_\omega)_{\omega\in\Omega} \mapsto x_a \end{array}$$

Par transitivité et G-inv. $\mu_a = \lambda \ \forall a \in \Omega$.

Soit $a_1, \dots, a_n \in \Omega$, $Z_1, \dots, Z_n \subseteq [0,1]$

si $I \subseteq [\![1,n]\!]$, $A_I = \{a_i \mid i \in I\}$

$$C_I = \{(x_\omega)_{\omega\in\Omega} \mid \forall i \in I,\ x_{a_i} \in Z_i\} \in \mathcal{F}_{A_I}.$$

Donc $\mu(C_{[\![1,n]\!]}) = \mu(C_{\{1\}} \cap C_{[\![2,n]\!]})$

$= \mu_{a_1}(C_{\{1\}})\,\mu(C_{[\![2,n]\!]})$ par dissociation.

$= \lambda(Z_1)\,\mu(C_{[\![2,n]\!]})$ $(\mathcal{F}_\emptyset = \{\emptyset, X\})$.

$= \lambda(Z_1) \dots \lambda(Z_n)$

Donc $\mu = \lambda^{\otimes\Omega}$. $\boxed{\text{//}}$

Théorème [JJ23]

Soit $G \leq_f \mathrm{Sym}(\Omega)$ sous-groupe propre, avec peu de SGO et $G \curvearrowright \Omega$ transitive.

Si $\alpha : G \curvearrowright (X,\mu)$ ergodiq est dissociée alors α est soit :

- essentiellement libre : $\mu\{x \in X \mid \mathrm{Stab}_G(x) = \{e_G\}\} = 1$
- essentiellement transitive : $\exists\, O \subseteq X$ orbite tq $\mu(O) = 1$.

essentiellement transitive $\Leftrightarrow$ α est conjuguée à $G \curvearrowright (G/H, \mu)$ où $H \leq_f G$.

Question : Soit $G \leq_f \mathrm{Sym}(\Omega)$. Trouver une condiO sur $H \leq_f G$ pour qu'il existe $\mu \in \mathrm{Prob}_G(G/H)$.

Réponse pour $G = \mathrm{Sym}(\Omega)$: [ACKERMAN, FRIER, PATEL].

$\exists \mu \in \mathrm{Prob}_{\mathrm{Sym}(\Omega)}(\mathrm{Sym}(\Omega)/H) \iff H \leq_f \mathrm{Sym}(\Omega)$ n'a pas d'algébricité :

$\forall A \subseteq \Omega$ fini, $H_A \curvearrowright \Omega \setminus A$ n'a pas d'orbite finie.