GdT Théorie ergodique
27 Juin

# Équivalence orbitale et mélange

## I Introduction et Panorama

**Définition** : une action pmp $\Gamma \overset{T}{\curvearrowright} (X,\mu)$ est mélangeante si pour tout $A, B \subseteq X$,

$$|\mu(A \cap T^{\gamma}B) - \mu(A)\mu(B)| \underset{|\gamma| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

où $|\gamma| \to +\infty$ signifie $\gamma$ sort de tout ensemble fini.

Exemple : $\Gamma$ dénombrable infini, $(A, \kappa)$ espace de proba standard, $\Gamma \curvearrowright (A, \kappa)^{\otimes \Gamma}$ est mélangeant.

### I.1) OE et mélange

Question : Comment se comporte le mélange par OE ?

[ORNSTEIN-WEISS 1980] : Si $\Gamma$ est moyennable, toute action pmp ergodique libre de $\Gamma$ est OE à une action mélangeante.

Et dans le monde non moyennable ? Le même résultat n'est pas vrai en général. Plusieurs obstructions possibles.

- Superrigidité en équivalence orbitale : Certaines actions pmp de certains groupes ne sont pas OE à une action mélangeante : $SL_n(\mathbb{Z}) \curvearrowright (\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n, \mathrm{Leb})$ [FURMAN, 1999].

- Propriété de Haagerup.

  **Définition** : Une action pmp $\Gamma \overset{T}{\curvearrowright} (X,\mu)$ est <u>fortement ergodique</u> si pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0} \subseteq X^{\mathbb{N}}$ qui vérifie

  $$\mu(A_n \Delta T^{\gamma} A_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad \text{(asymptotiquement invariante)}$$

on a $\mu(A_n)\,(1-\mu(A_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (asymptotiquement triviale)

<u>Remarque</u> : fortement ergodique $\Rightarrow$ ergodique

<u>Lemme</u> : Si $\Gamma$ est non moyennable, $\Gamma \curvearrowright (A,\kappa)^{\otimes\Gamma}$ est fortement ergodique.

<u>Preuve</u> : on utilise la description de la représentation de Koopman d'un décalage de Bernoulli + la caractérisation de la moyennabilité à l'aide de sa représentation régulière (Kesten-Li)

<u>Lemme</u> : L'ergodicité forte est un invariant d'équivalence orbitale.

<u>Preuve</u> : $\Gamma \curvearrowright^T (X,\mu)$ et $\underbrace{\Lambda \curvearrowright^S (X,\mu)}_{\text{libres}}$ mêmes orbites.

$c : \Gamma\times X \to \Lambda$.

On va montrer que toute suite asymptotiquement inv. pour $S$ l'est aussi pour $T$. Soit $(A_n)$ asymptotiquement inv. pour $S$.

Soit $\gamma\in\Gamma$. Posons $B_\lambda = \{x\in X \mid T^\gamma x = S^\lambda x\}$ $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$
$= \{x\in X \mid c(\gamma,x)=\lambda\}$ est une partition de $X$

$$\mu(A_n \Delta T^\gamma A_n) = \mu(A_n \setminus T^\gamma A_n) + \mu(T^\gamma A_n \setminus A_n).$$

$$\mu(T^\gamma A_n \setminus A_n) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \mu(T^\gamma(B_\lambda\cap A_n)\setminus A_n).$$

plus efficace : Thm de convergence dominée.

on va fixer $\varepsilon>0$. Soit $F\subseteq\Lambda$ fini tq $\mu\left(\bigsqcup_{\lambda\in F} B_\lambda\right) \geq 1-\varepsilon$.

$$\mu(T^\gamma A_n\setminus A_n) \leq \varepsilon + \sum_{\lambda\in F}\mu(T^\gamma(B_\lambda\cap A_n)\setminus A_n)$$
$$= \varepsilon + \underbrace{\sum_{\lambda\in F}\mu(S^\lambda(B_\lambda\cap A_n)\setminus A_n)}_{\leq\,\varepsilon \text{ pour } n \text{ assez grand}}$$

**Définition** [JOLISSAINT] $\Gamma$ dénombrable admet la propriété de Haagerup s'il existe une action pmp libre $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ mélangeante non fortement ergodique.

**Remarque** : $\Gamma$ moyennable, $\Gamma \curvearrowright (A,\kappa)^{\otimes\Gamma}$ est mélangeant pas fortement erg. [ORNSTEIN-WEISS, 1980]
donc $\Gamma$ a la prop de Haagerup.

**Fait** : Un groupe dénombrable $\Gamma$ a la propriété (T) ssi toutes ses actions pmp libres ergodiques sont fortement ergodiques. [CONNES-WEISS, 1980]

Ainsi, si $\Gamma$ n'a ni la propriété (T), ni Haagerup (ex : $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$) alors il admet une action pmp libre erg pas fortement ergodique.
Une telle action ne peut pas être OE à une action mélangeante.

Il s'avère que $F_2$ a la propriété de Haagerup. La question suivante est ouverte :

**Question** : Est-ce que toute action pmp libre ergodique de $F_2$ est OE à une action mélangeante de $F_2$ ?

## I.2) OE quantitative et mélange.

Une OE entre deux actions pmp libres est $L^\infty$ si les cocycles d'OE ne prennent qu'un nb fini de valeurs p.s. : si $c_1 : \Gamma \times X \to \Lambda$, $c_2 : \Lambda \times X \to \Gamma$ sont les cocycles,

$\forall \gamma \in \Gamma$, $c_1(\gamma, -)$
$\forall \lambda \in \Lambda$, $c_2(\lambda, -)$
ne prennent qu'un nb fini de valeurs.

**Question** : Comment se comporte le mélange par $L^\infty$-OE ?

**Théorème** (FIELDSTEEL, FRIEDMAN, 1986) : Toute action pmp libre ergodique de $\mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$ est $L^\infty$ OE à une action mélangeante de $\mathbb{Z}^n$.

**Remarque** : Faux pour $\mathbb{Z}$ (BELINSKAYA).

**Théorème** : (J. 2023) : Il existe des actions pmp libres ergodiques $F_d \curvearrowright^T (X,\mu)$, $F_d \curvearrowright^S (Y,\nu)$ qui sont $L^\infty$-OE, avec $T$ mélangeante mais $S$ non.

## II Les prémisses de l'équivalence orbitale restreinte

### II. 1) OE restreinte

Soit $\Gamma \curvearrowright^T (X,\mu)$ action pmp libre. $\mathcal{R}_T$ relation d'équivalence orbitale.

Groupe plein de $\mathcal{R}_T$ : $[\mathcal{R}_T] = \{ \phi \in \mathrm{Aut}(X,\mu) \mid (x, \phi(x)) \in \mathcal{R}_T \ \forall^* x \in X \}$

On note $\mathrm{Fr}(\mathcal{R}_T) = \{ \Gamma \curvearrowright^S (X,\mu) \text{ libre} \mid \mathcal{R}_S = \mathcal{R}_T \}$

On a une action (à droite) de $[\mathcal{R}_T]$ sur $\mathrm{Fr}(\mathcal{R}_T)$ :

**Lemme** : Pour tout $\phi \in [\mathcal{R}_T]$, $\phi^{-1} T \phi$ et $T$ ont les mêmes orbites.

**Preuve** : $S := \phi^{-1} T \phi \in [\mathcal{R}_T]$ donc $\mathrm{Orb}_S(x) \subseteq \mathrm{Orb}_T(x)$ p.s.

Réciproquement, $\phi \in \phi^{-1}[\mathcal{R}_T]\phi \left( = [(\phi^{-1} \times \phi^{-1})(\mathcal{R}_T)] \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{en exercice}}}{=} [\mathcal{R}_{\phi^{-1}T\phi}] = [\mathcal{R}_S]$

donc $T = \phi S \phi^{-1} \in [\mathcal{R}_S]$

donc $\mathrm{Orb}_T(x) \subseteq \mathrm{Orb}_S(x)$ p.s. $\boxtimes$

Donc $\mathrm{Fr}(\mathcal{R}_T) \curvearrowleft [\mathcal{R}_T]$ : $S \cdot \phi = \phi^{-1} S \phi$.

[ORNSTEIN-WEISS 1980] : Si $\Gamma$ est moyennable, alors $\forall S, U \in \mathrm{Fr}(\mathcal{R}_T)$ il existe $\phi_n \in [\mathcal{R}_T]$ tq $d_\mu(\phi_n^{-1} S^\gamma \phi_n, U^\gamma) \to 0 \ \forall \gamma \in \Gamma$

où $d_\mu(V,W) = \mu\{x \in X \mid V(x) \neq W(x)\}$.

L'adhérence de orbites de $Fr(\mathcal{R}_T) \cap [\mathcal{R}_T]$ est $Fr(\mathcal{R}_T)$.

↑ topologie induite par $d_\mu$.

## II. 2) Le cas de $\mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$. [FIELDSTEEL, FRIEDMAN, 1986].

Soit $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright^T (X,\mu)$ action pmp libre ergodique. $\mathcal{R}_T$ rel. d'équiv. orbitale.

**Définition:** Une tour pour $T$ est $T^F B$, où :

- $F \subseteq \mathbb{Z}^2$ fini, qui contient $0_{\mathbb{Z}^2}$, connexe ($\mathbb{Z}^2$ est muni de son graphe de Cayley usuel)
  penser à $F = B(0,n)$ pour la norme $\ell^\infty$.
- $B \subseteq X$ mesurable

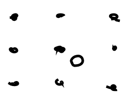
tels que $(T^u B)_{u \in F}$ sont 2 à 2 disjoints.

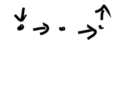
Base : $B$
Forme : $F$

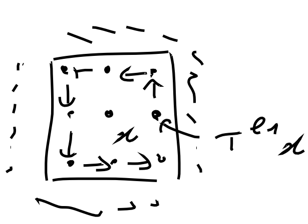
Soit $T^F B$ une tour, $\pi : B \to Sym(F)$ mesurable. On construit $\phi \in [\mathcal{R}_T]$ de la façon suivante :

- $supp(\phi) \subseteq T^F B$. Autrement dit, $\phi(x) = x$ $\forall x \in X \setminus T^F B$.
- si $x \in B$, $u \in F$, $\phi(T^u x) = T^{\pi(x)(u)} x$.

Un dessin :

$F =$  $= B(0,1)$ Pour $x \in B$, $\pi(x) =$ rota° centrée en 0 de 1

$\phi(T^{e_1} x) = T^{e_1+e_2} x$  $\in Sym(F)$.



Étant donnés une tour $T^F B$ et $\pi : B \to \mathrm{Sym}(F)$ mesurable, on va construire $S \in \mathrm{Fr}(\mathcal{R}_T)$ de la façon suivante :

- $S = \phi^{-1} T \phi$ (façon formelle)
- (façon informelle) : on veut définir $S$ :

$x \in X$, $u \in \mathbb{Z}^2$

$$\begin{tikzcd} \phi(x) \arrow[r, "T^v"] & \phi(T^u x) \\ x \arrow[u] \arrow[r, "T^u", "S^v"'] & T^u x \arrow[u] \end{tikzcd}$$

on définit $S^v x = T^u x$

## Une propriété importante :

Soit $x \in T^F B$, $x = T^u y$, $y \in B$, $u \in F$.

Soit $v \in \mathbb{Z}^2$ tq $u+v \in F$.

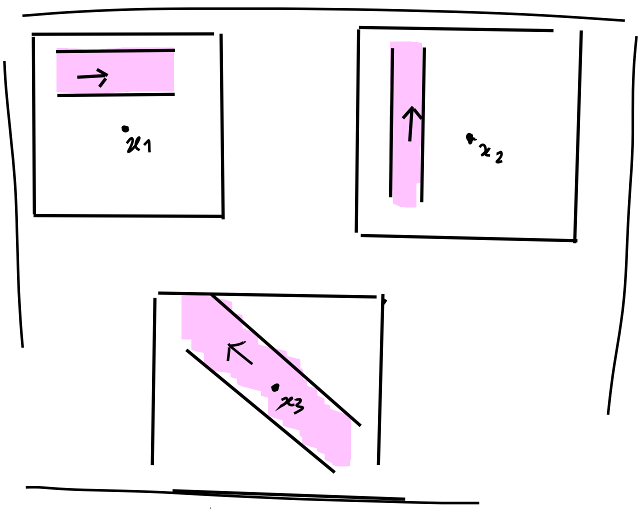
Si $\pi(y)(u+v) \underset{\circledast}{=} \pi(y)(u) + v$ alors $S^v x = T^v x$

$$\begin{tikzcd} \phi(x) \arrow[r, "T^v"] & \phi(T^v x) \\ x \arrow[u] \arrow[r, "S^v", "T^v"'] & T^v x \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$\circledast \Leftrightarrow$ " $\phi$ agit comme une $T$ translation sur le couple $(x, T^v x)$ "

$\circledast \Leftrightarrow$ le $T$-cocycle de $\phi$ est constant sur $\{x, T^v x\}$.

## Dessin :




$\mathrm{Orb}_T(x)$

$x_i \in B$

$\pi(x_i) \in \mathrm{Sym}(F)$ agit une translation de vecteur $t_i$.

$\forall x \in$ , $\forall u \in \mathbb{Z}^2$ tq $T^u x \in$ même secteur , $T^u x = S^u x$.

Le processus utilisé par Fieldsteel et Friedman :

On part de $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright^T (X,\mu)$ pmp libre ergodique. $\mathcal{R} = \mathcal{R}_T$

On construit une suite de tours. $(T_n^{F_n} B_n)$ pour l'action $T_n$

. $\Pi_n : B_n \to \mathrm{Sym}(F_n)$ mesurable,

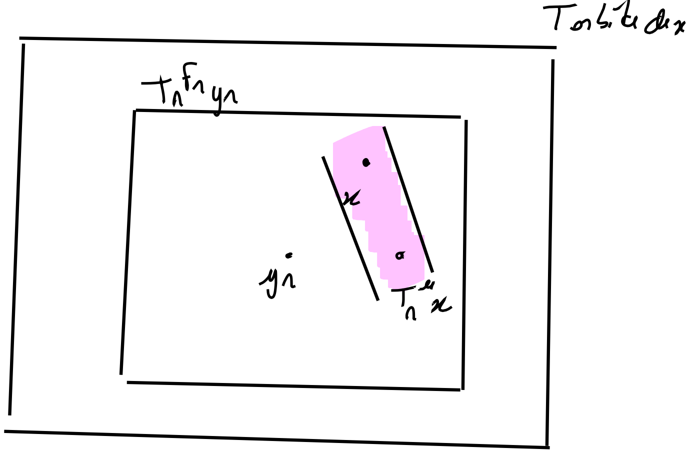
où : $T_0 = T$, $T_{n+1} = \phi_n^{-1} T_n \phi_n$, avec $\phi_n \in [\mathcal{R}]$ construit à l'aide de $\Pi_n$ et $T_n$,

qui vérifient la propriété suivante :

$\forall x \in X$, $\forall u \in \mathbb{Z}^2$, à partir d'un certain rang $n_0$,

il existe $y_n \in B_n$ tq $x, T_n^u x \in T_n^{F_n} y_n$.

et $\phi_n$ agit comme une $T_n$-translation sur $(x, T_n^u x)$




Donc par la discussion précédente, $\forall n \geq n_0$, $T_n^u x = T_{n_0}^u(x)$

Donc $T_n^u x \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} S^u(x)$, $\forall x \in X$, $\forall u \in \mathbb{Z}^2$.

<u>Lemme</u> : $S$ est une action pmp libre de $\mathbb{Z}^2$, qui est OE à $T$.

<u>Preuve</u> : • Soit $x \in X$, $u, v \in \mathbb{Z}^2$. $S^{u+v} x = S^u(S^v x)$

est vrai en prenant $n \geq \max(n_0(x), n_0(S^v x))$. action ok.

• action libre ok.

• $\mathrm{Orb}_S(x) \subseteq \mathrm{Orb}_T(x)$ ok.

- Soit $x \in X$, $u \in \mathbb{Z}^2$. On voudrait dire que $T^u x \in \mathrm{Orb}_S(x)$.

pour tout $n$, $T_n$ et $T$ sont OE. Donc $c_n : \mathbb{Z}^2 \times X \to \mathbb{Z}^2$, $T_n^{c_n(u,x)} x = T^u x$

tq $\forall^* x \in X$, $c_n(-,x) : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ est bijectif. (les actions sont libres)

$\forall x$, $\forall u$, $c_n(u,x)$ est constant APCR (à partir d'un certain rang)

$$c_n(u,x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} c(u,x)$$

Pour dire que T et S sont OE, il suffit de montrer que $c(-,x)$ est bijectif p.s.

- $c(-,x) : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ est injectif p.s. :

  si $c(u,x) = c(v,x)$ alors $c_n(u,x) = c_n(v,x)$ APCR $\Rightarrow u = v$ car $c_n$ est injectif.

- $c(-,x) : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ est surjectif p.s. : ?

Ce qui va probablement jouer un rôle important :

Si $\pi_n : B_n \to \mathrm{Sym}(F_n)$, le déplacement de $\pi_n$ :

$$\mathrm{dép}(\pi_n) = \sup_{x \in B_n} \max_{u \in F_n} \|\pi_n(x)(u) - u\|$$

Il semble nécessaire d'avoir une condition du type

$$\mathrm{dep}(\pi_n) \ll \mathrm{diam}(F_n)$$

<u>Quelques idées :</u>

- comprendre si on appliquer une stratégie similaire pour d'autres groupe moyennable.
- FF utilisent de manière essentielle le fait que $\mathbb{Z}^2$ est moyennable.
- Si $\Gamma$ non moyennable, $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ libre non fortement ergodique,

alors il existe $\phi : (X, \mu) \twoheadrightarrow (Y, \nu)$ et une action pmp de $\mathbb{Z} \curvearrowright (Y, \nu)$ tq $\phi(\Gamma \cdot x) = \mathbb{Z} \cdot \phi(x)$ $\forall^* x \in X$

[JONES-SCHMIDT]