OE pour des groupes localement finies

Γ = gp dén loc fini

↳ $\Gamma = \bigcup_n \nearrow \Gamma_n$, Γ_n fini

$\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ libre ergodique pmp

$$R_\Gamma = \{(x,\gamma\cdot x) : x\in X, \gamma\in\Gamma\} = \bigcup_n \nearrow \underbrace{R_{\Gamma_n}}_{\text{à classes finies}} \longrightarrow R_\Gamma \text{ est hyperfinie}$$

Def R rel d'éq borélienne ($\subseteq X\times X$) est hyperfinie si elle s'écrit comme réunion croissante de rel d'éq boréliennes à classes finies

Fait: Toute rel d'éq hyperfinie provient d'une act° de $\mathbb{Z}$ et vice-versa

→ comme le thm de Dye nous dit que les act° ergo pmp de $\mathbb{Z}$ sont toutes OE,

toutes les act° pmp ergodiques de tous les groupes loc. finis sont OE.

(On a en fait bien mieux : le thm d'Connes Weiss dit que toutes les relat° d'éq provenant d'act° pmp de groupes moyennables sont hyperfinies (à mesure nulle près) $\overset{\text{Dye}}{\leadsto}$ elles sont toutes OE)

On va raffiner la not° d'OE entre relat° hyperfinies en retenant l'exhaust° de R par $\bigcup_n R_n$ (on retient R_n $\forall n$)

Def: $R = \bigcup_n R_n$, $S = \bigcup_n S_n$ sont exhaustivt OE

si $\exists\, T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ / $(T\times T(R) = S)$

et en fait $\forall n$ $\underline{T\times T(R_n) = S_n}$

Au niveau groupe $\Gamma = \bigcup_n \Gamma_n$ on veut envoyer Γ_n-orbite sur Λ_n-orbite.

$\Lambda = \bigcup_n \Lambda_n$

Si les act° sont libres (ce qu'on supposera toujours), on devrait demander $|\Gamma_n| = |\Lambda_n|$ $\forall n$

Prop: Toute $\Gamma = \bigcup_n \Gamma_n$ act° est exh. OE à une $\Lambda = \bigoplus_n \mathbb{Z}/l_n\mathbb{Z}$ act°

où $l_n = |\Gamma_n/\Gamma_{n-1}|$ $(\Gamma_{-1} = \{1\})$ $\quad \Lambda_n = \bigoplus_{k\le n} \mathbb{Z}/l_k\mathbb{Z}$

Pv: On construit directement $\Lambda \curvearrowright X$ tq $R_{\Lambda_n} = R_{\Gamma_n}$

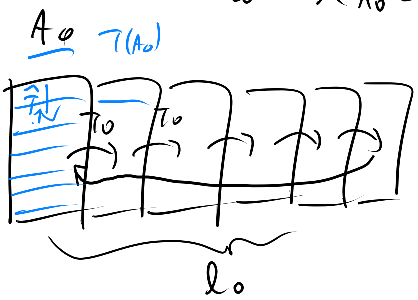
Γ_0 agit librement (fini) ⇝ $A_0 \subseteq X$ qui intersecte chaque Γ_0-orbite en un unique point ($<$ ordre total borélien, $A_0 = \{x \in X : x$ est le $<$ min de sa Γ_0-orbite$\}$)

$l_0 = |\Gamma_0|$

$T_0 \in [R_{\Gamma_0}]$ donné $T_0(x) = \begin{cases} \text{le } <\text{-successeur de } x \text{ dans la } \Gamma_0\text{-orbite de } x \text{ si } x \text{ n'est pas le max} \\ \text{le } <\text{-min de } \Gamma_0\cdot x \text{ si } x = \max \Gamma_0\cdot x \end{cases}$

⇝ T_0 induit $\Lambda_0 = \mathbb{Z}/l_0\mathbb{Z} \curvearrowright X$

et $R_{\Lambda_0} = R_{\Gamma_0}$



$R_{\Gamma_1 \upharpoonright A_0}$ a toutes ses classes de cardinal l_1

Si $x \in A_0$

$$[x]_{R_{\Gamma_1}} = [x]_{R_{\Gamma_1}\upharpoonright A_0} \cup [T_0(x)]_{T_0\times T_0(R_{\Gamma_1\upharpoonright A_0})} \cup \dots \cup [T_0^{l_0-1}x]$$

on a alors un $\hat{T}_1 \in [R_{\Gamma_1 \Gamma A_0}]$ cyclique comme précédemment

tq $R_{\Gamma_1 \Gamma A_0} = R_{\hat{T}_1}$

$\hat{T}_1$ a toutes ses orbites de taille l_1

$X = [0,1]$

$<$: ordre usuel

On l'étend en $T_1 \in [R_{\Gamma_1}]$ commutant à T_0

si $x \in T_0^k(A_0)$

$T_1(x) = T_0^k \hat{T}_1 T_0^{-k}(x)$

$T_1 \rightsquigarrow$ act° de $\mathbb{Z}/l_1\mathbb{Z}$

$T_0, T_1 \rightsquigarrow$ act° Λ_1. On continue ! (A_1 dom fd $R_{\Lambda_1} = R_{\Gamma_1}$) $\square$

<u>La suite</u> : Act° de $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/l_n\mathbb{Z}$ à OE exhaustive près

<u>Thm 1</u> (Vershik)

$\Gamma = \bigcup_n \Gamma_n$

on prend 2 act° libres α, β ergodiques de Γ

alors $\exists (n_k)$ et $S \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ OE entre R_α et R_β

qui envoie en fait $R_{\alpha(\Gamma_{n_k})}$ sur $R_{\beta(\Gamma_{n_k})}$

<u>Thm 2</u> (Stepin - Vershik)

$\Gamma = \bigoplus_n \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \bigcup_n \Gamma_n$

$\Gamma_n = \bigoplus_{k \leq n} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Alors si 2 act° libres α, β de Γ sont exhaustivement OE

on a $|h(\alpha) - h(\beta)| \leq \log 2$

En particulier toutes les act° libres de Γ sont Shannon OE (le cocycle de $\gamma \in \Gamma_{n_k}$ à valeurs dans Γ_{n_k} fini)

<u>Cor</u> : 2 décalages de Bernoulli d'entropie $\geq \log 2$ éloignés ne peuvent être exhaustivement OE.

<u>Idée de la preuve du thm 1</u> :

Γ a une act° prop particulière, analogue à l'odomètre pour la pr du thm de Dye :

$\Gamma = \bigoplus \mathbb{Z}/l_n\mathbb{Z} \leq \left(\prod_n \mathbb{Z}/l_n(\mathbb{Z}), \bigotimes_n (\text{comptage normalisé sur } \mathbb{Z}/l_n\mathbb{Z})\right)$

$\bigoplus \mathbb{Z}/l_n\mathbb{Z} \curvearrowright \prod_n \mathbb{Z}/l_n\mathbb{Z}$ par translat°

l'act° de $\Gamma_n = \bigoplus_{k \leq n} \mathbb{Z}/l_k\mathbb{Z}$ a un <u>domaine fd</u>

$A_n = \{(x_i) : x_0 = \cdots = x_n = 0\}$

Si $\mathcal{P}_n = \{\gamma A_n, \gamma \in \Gamma_n\}$ alors $\mathcal{P}_n \leq \mathcal{P}_{n+1}$

et $\mathcal{B}(\bigcup_n \mathcal{P}_n) = \mathcal{B}(X)$

étant donné $\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X,\mu)$ libre ergodique, on veut construire une OE entre cette act° et α qui envoie Γ_{n_k}-orbite sur Γ_{n_k}-orbite

On va construire (A_{n_k}) décroissante, tq A_{n_k} dom fd de $\alpha(\Gamma_{n_k})$, et si $\mathcal{P}_k = \langle \alpha(\gamma) A_{n_k} : \gamma \in \Gamma_{n_k} \rangle$

et "déformer" α en $\tilde{\alpha}$ avec $\alpha(\Gamma_{n_k}) \cdot x = \tilde{\alpha}(\Gamma_{n_k}) \cdot x$

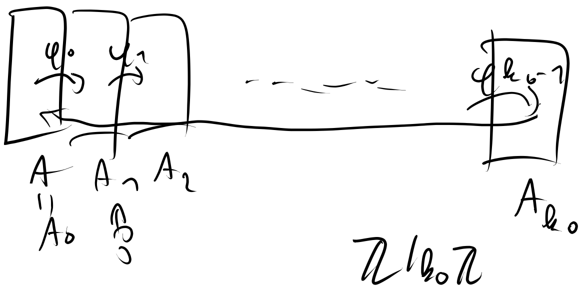
alors $\mathcal{P}_{k+1} \geq \mathcal{P}_k$. On a alors une conjugaison entre $\tilde{\alpha}$ et l'act° de type odomètre de Γ
<u>et</u> $\sigma(\bigcup \mathcal{P}_n) = \mathcal{B}(X)$

On prend (Q_n) partit° finies de X croissantes tq $\sigma(\bigcup Q_n) = \mathcal{B}(X)$

On veut construire A_{n_0} tq le $\mathcal{P}_{n_0}$ associé "contienne Q_0 à ε_0 près"
↳ tout élt $A \in Q_0$ est réunion d'élts $B_1 \ldots B_\ell$ de $\mathcal{P}_{n_0}$, à ε_0 près
$(\mu(A \Delta B_1 \cup \cdots \cup B_\ell) < \varepsilon_0)$

On coupe X en une partit° $\mathcal{P}$ en k_0 morceaux de même mesure tq (prendre $\frac{1}{k_0} < \varepsilon_0$)
$k_0 = \ell_0 \cdots \ell_{n_0'}$ $\quad Q \in_{\varepsilon_0} \mathcal{P}$

⇝ il existe une act° libre β de $\Gamma_{n_0'}$ à valeurs dans $[R_\Gamma]$ avec $A \in \mathcal{P}$ domaine fdl et $\mathcal{P} = \{\beta(\gamma) A : \gamma \in \Gamma_{n_0'}\}$



$\mathbb{Z}/k_0\mathbb{Z}$

⚠ $\alpha(\Gamma_{n_0'})$ n'a plus les mêmes orbites que $\beta(\Gamma_{n_0'})$
<u>Mais</u> $\alpha(\Gamma_{n_0'})$ et $\beta(\Gamma_{n_0'})$ sont conjugués par un élt $S \in [R_\Gamma]$
et $\bigcup_n [R_{\alpha(\Gamma_n)}]$ est dense dans $[R_\Gamma]$
(topo : $d_u(S,T) = \mu(\{x : S(x) \neq T(x)\})$)

<u>Pv</u> : $T \in [R_\Gamma]$, $X_n = \{x \in X : (x, T(x)) \in R_{\Gamma_n}\}$
alors $\bigcup_n X_n = X$

$\varphi_n = T_{\restriction X_n} \in [[R_{\Gamma_n}]]$
et on peut prolonger φ_n en $T_n \in [R_{\Gamma_n}]$
$d_u(T_n, T) \leq \mu(X \setminus X_n) \to 0$
□

⇝ on prend $n_0 \gg n_0'$ de sorte qu'on a $S_0 \in [R_{n_0}]$
tq $S_0 \alpha(\Gamma_{n_0'}) S_0^{-1}$ est très proche de β
↳ on a un dom fdl A_0' dont les $\tilde{\alpha}(\Gamma_{n_0})$ translatés approchent à $2\varepsilon_0$ près Q_0

alors $\tilde{\alpha}_{\restriction \Gamma_{n_0}} = S_0 \alpha_{\restriction \Gamma_{n_0}} S_0^{-1}$

<u>et</u> $\alpha(\Gamma_{n_0})$ et $\tilde{\alpha}(\Gamma_{n_0})$ ont les mêmes orbites car on a conjugué par $S_0 \in [R(\Gamma_{n_0})]$

Posons $\tilde{\alpha}_0 = S_0 \alpha S_0^{-1}$ alors on ne va plus changer l'act° de Γ_{n_0}

On recommence en travaillant dans $X / \tilde{\alpha}_0(\Gamma_{n_0})$ ... $\square$

Thm 2 (Stepin - Vershik)

$$\Gamma = \bigoplus_n \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \bigcup_n \Gamma_n \qquad \Gamma_n = \bigoplus_{k \le n} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Alors si 2 act° libres α, β de Γ sont exhaustives OE

on a $|h(\alpha) - h(\beta)| \le \log 2$

Pr: On note $S_\gamma = \alpha(\gamma)$
$T_\gamma = \beta(\gamma)$

Par hyp $\forall n, \forall x$ $\mathrm{Orb}_{S(\Gamma_n)}(x) = \mathrm{Orb}_{T(\Gamma_n)}(x)$

Rappel : $\Gamma = \bigcup_n \Gamma_n$ ← Følner

$$h(S, R) = \lim_{n \to \infty} \frac{H\left(\bigvee_{\gamma \in \Gamma_n} S_\gamma R\right)}{2^n}$$

(R partit° finie ; $2^n = |\Gamma_n|$)

$$h(T, R) = \lim_{n \to \infty} \frac{H\left(\bigvee_{\gamma \in \Gamma_n} T_\gamma R\right)}{2^n}$$

NB : La partit° $\bigvee_{\gamma \in \Gamma_n} T_\gamma R$ est $T(\Gamma_n)$-invariante

Soit $\mathcal{P}$ une partit° $T(\Gamma_n)$ invariante. On veut savoir à quel point ← pas beaucoup !

$\bigvee_{\gamma \in \Gamma_n} S(\gamma) \mathcal{P}$ est plus "compliquée" que $\mathcal{P}$.

Soit (p_k) déf par $p_0 = 1$, $p_{k+1} = 2^k p_k^2$

Lemme : Soit $\mathcal{P}$ $T(\Gamma_n)$-inv, $\hat{Q} = \bigvee_{\gamma \in \Gamma_n} S(\gamma) \mathcal{P}$
Alors "$\hat{Q}$ est obtenue en divisant chaque élt de $\mathcal{P}$ en au plus p_n morceaux"

Preuve : Par réc sur n.

$\gamma_i = (00 \ldots 0 1 0 \ldots)$ ($\bigoplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, i)

$\Gamma_n = \langle \gamma_0, \ldots, \gamma_n \rangle$

$n = 0$ $\quad \Gamma_0 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

T_{γ_0} et S_{γ_0} sont 2 invol avec les m̂ orbites

$\longrightarrow T_{\gamma_0} = S_{\gamma_0} \quad \to p_0 = 1$ ✓ ($\mathcal{P}$ est déjà $S(\Gamma_0)$-inv)

$n \rightsquigarrow n+1$: $(p_{n+1} = 2^n \cdot p_n^2)$

soit $\mathcal{P}$ qui est $T(\Gamma_{n+1})$-inv

$\to Q = \bigvee_{\gamma \in \Gamma_n} S_\gamma \mathcal{P}$ alors par hyp de réc

Q est obtenu en découpant chaque élt de $\mathcal{P}$ en au plus p_n morceaux.

$\hat{Q} = Q \vee S_{\gamma_{n+1}} Q$ (car $\Gamma_{n+1} = \langle \gamma_{n+1}, \Gamma_n \rangle$ + γ_{n+1} involut° et γ_{n+1} commute à Γ_n, comme $S(\Gamma_n)$ & $T(\Gamma_n)$ ont les mm orbites et chaque $S(\Gamma_{n+1})$ - orbite se divise en 2 $S(\Gamma_n)$ - orbites, le T cocycle de $S_{\gamma_{n+1}}$ a sa coord $n+1 = 1$: partit° $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_n}$ de X /

$$\forall x \in A_\gamma, \quad S_{\gamma_{n+1}}(x) = T_\gamma T_{\gamma_{n+1}}(x)$$

Soit la partit°
$$\tilde{Q} = \{ A_\gamma \cap C \cap T_\gamma T_{\gamma_{n+1}}(C') : \gamma \in \Gamma_n, \ C \in Q, \ C' \in Q \}$$

alors $\tilde{Q}$ raffine Q et est $S(\gamma_{n+1})$ - invariante :

en effet A_γ est $S(\gamma_{n+1})$ - inv
(c'est l'ensemble où $S(\gamma_{n+1})$ coincide avec l'involut° l'involut° $T_{\gamma\gamma_{n+1}}$)

comme $S_{\gamma_{n+1}}$ coincide avec $T_\gamma T_{\gamma_{n+1}}$ sur A_γ

$$\tilde{Q} = \{ A_\gamma \cap C \cap S_{\gamma_{n+1}} C' : \gamma \in \Gamma_n, \ C \in Q, \ C' \in Q \}$$

$\rightsquigarrow$ $\tilde{Q}$ est est $S_{\gamma_{n+1}}$ - inv

$$\tilde{Q} = \{ \underbrace{A_\gamma}_{2^n} \cap \underbrace{C}_{\substack{\text{au plus} \\ p_n \text{ dans un} \\ D \in \mathcal{D}}} \cap T_\gamma T_{\gamma_{n+1}}(\underbrace{C'}_{\substack{\text{au plus} \\ p_n \\ \text{dans un } D' \in \mathcal{D}}}) : \gamma \in \Gamma_n, \ C \in Q, \ C' \in Q \}$$

Chaque élt de $\tilde{Q}$ est obtenu en divisant les élts de $\mathcal{D}$ en au plus $p_n^2 \cdot 2^n$ morceaux

car Q ———————— p_n morceaux et $\mathcal{D}$ était $T(\Gamma_n)$ - inv

$\gamma \in \Gamma_n$ $D \in \mathcal{D}$ il y a $\leq p_n$ $C \subseteq D$,
et $(T_\gamma T_{\gamma_{n+1}})^{-1}(D) = D'$ en coupé en p_n morceaux C'

$\square$ lemme

Partons de R finie, $h(T(\Gamma), R) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{H(\bigvee_{\gamma \in \Gamma_n} T_\gamma R)}{2^n}$

soit $Q_n = \bigvee\limits_{\gamma \in \Gamma_n} S_\gamma (\overbrace{\bigvee\limits_{\gamma \in \Gamma_n} T_\gamma R}^{\mathcal{D} \text{ du lemme}})$

$$H(Q_n) \leq H(\bigvee_{\gamma \in \Gamma_n} T_\gamma R) + \underbrace{H(Q_n \mid \bigvee_{\gamma \in \Gamma_n} T_\gamma R)}_{\leq \log p_n}$$

$$\log p_{n+1} = 2 \log p_n + n \log 2$$

$$\rightsquigarrow \frac{\log p_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{\log p_n}{2^n} + \underbrace{\frac{n \log 2}{2^{n+1}}}_{\Sigma = \log 2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log p_n}{2^n} = \log 2$$

$$\frac{H\left(\bigvee_{\gamma\in\Gamma_n} S_\gamma(\mathcal{R})\right)}{2^n} \leq \frac{H(Q_n)}{2^n} \leq \frac{H\left(\bigvee_{\gamma\in\Gamma_n} T_\gamma(\mathcal{R})\right) + \log p_n}{2^n}$$

$n \to +\infty \rightsquigarrow$ $h(S, \mathcal{R}) \leq h(T, \mathcal{R}) + \log 2$

$\rightsquigarrow h(S) \leq h(T) + \log 2$

par symétrie $h(T) \leq h(S) + \log 2$

d'où $|h(S) - h(T)| \leq \log 2$ $\square$