# Invariance de l'entropie par équivalence orbitale de Shannon pour les actions pmp de $\mathbb{Z}$

13/06

**Théorème** Soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$, $U \in \mathrm{Aut}(Y,\nu)$ apériodiques et ergodiques.
On suppose qu'elles sont OE que l'un des 2 cocycle, disons $c_T : X \to \mathbb{Z}$ est Shannon.
Alors $h(T) \leq h(U)$

dû à Kerr et Li dans <u>Entropy, Virtual abelianess and Shannon OE</u>

**Remarque** : (1) Si on suppose $c_T$ et $c_U$ sont Shannon, alors $h(T) = h(U)$.
(2) vrai sans ergodicité :
- décomposition ergodique
- formule intégrale de l'étropie pour cette décomposition

## I - Prérequis

### 1) OE

Quitte à conjuguer, $(X,\mu) = (Y,\nu)$ et que $id_X$ est une OE.
$\rightarrow$ T et U ont les m̂ orbite.

$c_T : X \to \mathbb{Z}$, $c_U : X \to \mathbb{Z}$

$$Tx = U^{c_T(x)}x, \quad Ux = T^{c_U(x)}x$$

$K_T, K_U : \mathbb{Z} \times X \to \mathbb{Z}$

$$T^n x = U^{K_T(n,x)}x, \quad U^n x = T^{K_U(n,x)}x$$

$$c_T(\cdot) = K_T(1,\cdot), \quad c_U(\cdot) = K_U(1,\cdot)$$

**Propriété** : Identité de cocycle :

$$K_T(k+j,x) = K_T(j,x) + K_T(k, T^j x)$$

On en déduit (IC) : $K_T(jn,x) = \sum_{i=0}^{n-1} K_T(j, T^{ij}x)$

Par ex : $j=1$ : $K_1(n,x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_T(T^i x)$

## 2) Notations sur les partitions

- $H = H_\mu$, $h = h_\mu$
- partition au plus dénombrables
- $\mathcal{P}$ partition de $X$, $F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z})$, $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$

$$\mathcal{P}^F := \bigvee_{m\in F} T^{-m}(\mathcal{P})$$

$\mathcal{P}^n = \mathcal{P}^F$ pour $F = [\![0, n-1]\!]$

<u>Pb 1</u> : Si on a $T$ et $U \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$,

$\mathcal{P}^F$ pour l'action de $T$ ou de $U$ ?

<u>Pb 2</u> : On veut une notation plus visuelle pour ne pas perdre de vue l'info codée par une partition.

<u>Définition</u> : $f : X \to I$ mesurable est une <u>observable</u> (obs) si $I$ est au plus dénombrable (souvent $I \subseteq \mathbb{Z}$) et si $f$ est surjective.

- Souvent, on définit une partition $\mathcal{P} = \{ f^{-1}(i) : i \in I \}$ pour $f$ obs bien connue (ex : $f = c_T(\cdot)$ voire $f = K_T(n,\cdot)$)
- réciproquement une partition $\mathcal{P}$ définit une obs $f : x \in X \mapsto \mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}$

$\to$ on confond partition et observable
par abus on note $\mathcal{P} = f$, $H(f) = H(\mathcal{P})$, $|f|$ cardinal de $\mathcal{P}$, " $|\mathrm{im}\, f|$
" $P \in f$ " $\to$ " $P \in \mathcal{P}$ " etc

- On vérifie :
  - Si $\mathcal{P} = f$, $\mathcal{Q} = g$, alors $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = (f,g)$
  - $f \circ T^m$ obs de $T^{-m}(\mathcal{P})$

- Si $C \subseteq X$ mesurable, $\mathcal{P}_C := \{P \cap C \mid P \in \mathcal{P}, P \cap C \neq \emptyset\}$
  $f_{|C} : C \to f(C)$
  alors $\mathcal{P}_C = f_{|C}$

- $\mathcal{P}^F$ notation pour l'action de $T$
  pour l'action de $U$ : on note $\underbrace{(f \circ U^m)_{m \in F}}$

chaque pièce donne l'info :
"valeur prise par chaque $f \circ U^m$, $m \in F$"

## 3) OE Shannon

Déf : $Q_n^T$ partition d'obs $K_T(n, \cdot)$.

ie $Q_n^T = \{X_{n,m}^T : m \in \mathbb{Z}\}$ avec $X_{n,m}^T = \{x \in X : K_T(n, x) = m\}$

idem $Q_n^U = K_U(n, \cdot)$

Propriété : $Q_1^T = c_T(\cdot)$ donc $(Q_1^T)^n = (c_T(T^i(\cdot)))_{0 \leq i \leq n-1}$

Par (IC) pour $j = 1$ : $K_T(n, \cdot) = \sum_{i=0}^{n-1} c_T(T^i(\cdot))$

donc $Q_n^T \leq (Q_1^T)^n$.

donc $(\forall n \in \mathbb{Z}, H(K_T(n, \cdot)) < +\infty) \iff \underbrace{H(c_T) < +\infty}$

on dit que $c_T$ est Shannon

Déf : On parle d'OE Shannon lorsque $c_T$ et $c_U$ sont Shannon.
(ie $H(Q_1^T) < +\infty$, $H(Q_1^U) < +\infty$)

ICI on suppose seulement $c_T$ est Shannon

Mq $h(T) \leq h(U)$

## 4) Suites de Følner

$$h(T,\mathcal{P}) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{P}^n) = \lim \frac{1}{|[\![0,n-1]\!]|} H(\mathcal{P}^{[\![0,n-1]\!]})$$

On veut $(F_n) \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ ayant les mêmes propriétés que $([\![0,n-1]\!])_n$

__Définition__ : $(F_n) \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ est de Følner si

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{1}{|F_n|} |(k+F_n) \Delta F_n| \longrightarrow 0$$

__Ex__ : $F_n = [\![0,n]\!]$ ou $[\![-n,n]\!]$

__Définition__ : $K, F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z})$, $\delta > 0$. On dit que $F$ est $(K,\delta)$-invariant

si $\{m \in F : K+m \subseteq F\} \geq (1-\delta)|F|$

__Proposition__ : Soit $f : \mathcal{P}_f(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$.

(i) $\forall (F_n)$ de Følner, $f(F_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$

$\Updownarrow$

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z}), \exists \delta > 0,$

$\forall F$ $(K,\delta)$-invariant, $|f(F) - L| \leq \varepsilon$

$\Updownarrow$

(ii') (ii) restreint à $K = \{1\}$ $\leftarrow$ dû à $\mathbb{Z} = \{1\}$

On dit que $f(F)$ tend vers $L$ quand $F$ est de plus en plus invariant

noté $f(F) \overset{inv}{\underset{F\to+\infty}{\longrightarrow}} L$ ou $\overset{inv}{\lim_{F\to+\infty}} f(F) = L$

(i) $\simeq$ caractérisation séquentielle

(ii) $\simeq$ " avec des voisinages

__Théorème__ : • $h(T,\mathcal{P}) = \overset{inv}{\lim_{F\to+\infty}} \frac{1}{|F|} H(\mathcal{P}^F)$ (vrai $h_{top}$)

• $h(T,\mathcal{P}) = \inf_{F\in\mathcal{P}_f(\mathbb{Z})} \frac{1}{|F|} H(\mathcal{P}^F) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{|F_n|} H(\mathcal{P}^{F_n})$ $\forall (F_n)$ de Følner

(faux $h_{top}$)

## 5) Partition uniforme

Rappel : $\mathcal{P}^F$ pour l'action de $T$
pour l'action de $U$ : $(\mathcal{P} \circ U^m)_{m \in F}$

Pour $\mathcal{P}$ partition de $X$, on déf l'application de codage

$$q_{\mathcal{P}} : X \longrightarrow \mathcal{P}^{\mathbb{Z}}$$
$$x \longmapsto (\mathcal{P}(U^i x))_{i \in \mathbb{Z}}$$

ainsi que $E_{\mathcal{P}}$ le support de $\nu_{\mathcal{P}} := (q_{\mathcal{P}})_* \mu$
↳ invariant par le décalage $D_{\mathcal{P}} : \mathcal{P}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{P}^{\mathbb{Z}}$

Si $U$ est ergodique, on dit que $\mathcal{P}$ est $U$-uniforme
si $(D_{\mathcal{P}}, E_{\mathcal{P}})$ est uniquement ergodique
(ie $\nu_{\mathcal{P}}$ est l'unique mesure de proba invariante)

Propriété : $\mathcal{P}$ $U$-uniforme

(i) $\lim\limits_{F \to +\infty}^{\text{inv}} \frac{1}{|F|} \log |(\mathcal{P} \circ U^i)_{i \in F}|$ existe et est $\leqslant h(U)$

(ii) {partitions $U$-uniformes} dense dans {partitions}
pour la distance de Rokhlin $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \mapsto H(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) + H(\mathcal{Q}|\mathcal{P})$

Pour cette distance, $\mathcal{P} \mapsto h(T, \mathcal{P})$ est continue

→ on peut se restreindre aux partition $U$-uniforme

Jewett et Krieger

(iii) Si $\mathcal{P}$ est $U$-uniforme et $R \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z})$, alors $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{action de } T}}{\mathcal{P}^R}$ est $U$-uniforme.

# II - Démonstration du théorème

$$\text{Lemme } 3 \Rightarrow \text{Lemme } 1 \Rightarrow \text{th}$$
$$\text{Lemme } 2 \Rightarrow \text{th}$$

rappel : $Q_h^T = \kappa_T(h, \cdot)$

On définit $\tilde{h}(\kappa_T) := \inf_{h \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{h} H(Q_h^T)$

**Lemme 1** : $T, U \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ apériodiques et ergodiques.
On suppose qu'elles ont les m̂ orbites et que $c_T$ est Shannon :
alors $h(T) \leq h(U) + \tilde{h}(\kappa_T)$

**Lemme 2** : $\tilde{h}(\kappa_T) = 0$

**Lemme 3** : $T, U \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ aper, erg, m̂ orbites.
Soit $\delta > 0$, $F_n = [\![0, n]\!]$. Pour $n$ assez grand, il existe $X_n \subseteq X$ tel que
(i) $\mu(X_n) \geq 1 - \delta$
(ii) $\forall x \in X_n$, $\kappa_T(F_n, x)$ est $(\{1\}, \delta)$-invariante

$\mathcal{L}3 \Rightarrow \mathcal{L}1$ : on va approcher $\liminf_{F \to +\infty} \frac{1}{|F|} \log |(\mathcal{P} \circ U^m)_{m \in F}|$ avec $F = \kappa_T(F_n, x)$
$\hookrightarrow \mathcal{P}$ $U$-uniforme

Remarque : seulement dans la preuve du $\mathcal{L}3$ qu'on utilise
" $\forall^* x$ $\mathrm{Orb}_U(x) \subseteq \mathrm{Orb}_T(x)$ ". Dans le cas contraire, que peut-on dire ?
ex : $T = U^k$ : $h(T) = |k|\, h(U) > h(U)$ si $h(U) \neq 0, |k| \geq 2$

**Preuve du lemme 1** Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \{0, k, 2k, \dots, (n-1)k\}$
$n \in \mathbb{N}^*$
et $R = [\![0, k-1]\!]$. $F_n = I_n + R = [\![0, nk-1]\!]$. Soit $\mathcal{P}$ partition finie.
$\hookrightarrow$ Følner

Idée : on veut majorer $h(T,\mathcal{P})$ par qqch en $U$

pour passer de l'action de $T$ à $U$ : $T^{\ell}(\cdot) = U^{K_T(\ell,\cdot)}(\cdot)$

on veut se ramener au cas où $K_T(\ell,\cdot)$ (pour certains $\ell$) est constante

$\longrightarrow$ conditionner par rapport à une partition : $(Q_h^T)^{I_n}$

$$h(T,\mathcal{P}) = \inf_{m\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{|F_m|} H(\mathcal{P}^{F_m}) \leq \frac{1}{|F_n|} H(\mathcal{P}^{F_n})$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{|F_n|} H(\mathcal{P}^{F_n} \mid (Q_h^T)^{I_n})}_{\to\, h(U)\ (2)} + \underbrace{\frac{1}{|F_n|} H((Q_h^T)^{I_n})}_{\to\, \tilde{h}(K_T)\ (1)}$$

(1) $H((Q_h^T)^{I_n}) \leq |I_n|\, H(Q_h^T) = n\, H(Q_h^T)$

$|F_n| = h\, n$ donc $\frac{1}{|F_n|} H((Q_h^T)^{I_n}) \leq \frac{1}{h} H(Q_h^T)$ ✓

(2) $\mathcal{P}^{F_n} = \mathcal{P}^{R+I_n} = (\mathcal{P}^R)^{I_n}$ d'obs $(\mathcal{P}^R \circ T^i)_{i\in I_n} = (\mathcal{P}^R \circ T^{jh})_{0\leq j\leq n-1}$

$$H(\mathcal{P}^{F_n} \mid (Q_h^T)^{I_n}) = \sum_{C\in (Q_h^T)^{I_n}} \mu(C)\, H_{\mu_C}((\mathcal{P}^{F_n})_C)$$

$$= \sum_{C\in (Q_h^T)^{I_n}} \mu(C)\, H_{\mu_C}\Big((\mathcal{P}^R \circ \underbrace{T^{jh}}_{T^{jh} = U^{K_T(jh,\cdot)}(\cdot)}{}_{|C})_{0\leq j\leq n-1}\Big)$$

que fait $K_T(jh,\cdot)$ sur $C\in (Q_h^T)^{I_n}$ ?

Soit $C\in (Q_h^T)^{I_n}$ : $Q_h^T = K_T(h,\cdot)$ donc $(Q_h^T)^{I_n} = \underline{(K_T(h, T^{jh}(\cdot)))}_{0\leq j\leq n-1}$

Par (IC) : $K_T(jh,\cdot) = \sum_{\ell=0}^{j-1} \underline{K_T(h, T^{\ell h}(\cdot))}$

donc $K_T(jh,\cdot)$ est constante sur $C$, égale à $K_T(jh, x_C)$ pour $x_C \in C$ qcq.

$$\left(\mathcal{P}^R \circ T^{jh}{}_{|C}\right)_{0\leq j\leq n-1} = \left(\mathcal{P}^R \circ U^{K_T(jh,\cdot)}{}_{|C}\right)_{0\leq j\leq n-1}$$

$$= \left(\mathcal{P}^R \circ U^m{}_{|C}\right)_{m\in K_T(J_n, x_C)}$$

donc $H_{\mu_C}\left(\left(\mathcal{P}^R \circ T^{jh}{}_{|C}\right)_{0\leq j\leq n-1}\right) \leq \log\left|\left(\mathcal{P}^R \circ U^m{}_{|C}\right)_{m\in K_T(J_n, x_C)}\right|$

$$\leq \log\left|\left(\mathcal{P}^R \circ U^m{}_{|C}\right)_{m\in K_T(F_n, x_C)}\right| \text{ car } J_n \subseteq F_n$$

Au total : $$\frac{\underline{H\left(\mathcal{P}^{F_n} \mid (Q_h^T)^{J_n}\right)}}{|F_n|} \leq \sum_{C\in (Q_h^T)^{J_n}} \mu(C) \underbrace{\frac{\log\left|\left(\mathcal{P}^R \circ U^m{}_{|C}\right)_{m\in K_T(F_n, x_C)}\right|}{|F_n|}}_{\text{on fait apparaître (i) de la partie I-5)}}$$

$= |K_T(F_n, x_C)|$

Supposons $\mathcal{P}$ $U$-uniforme

(iii) $\Rightarrow$ $\mathcal{P}^R$ est $U$-uniforme

$$\frac{\log\left|\left(\mathcal{P}^R \circ U^m{}_{|C}\right)_{m\in F}\right|}{|F|} \xrightarrow[F\to+\infty]{\text{inv}} \ ? \ \leq h(U)$$

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$, $F$ est $(\{1\}, \delta)$-invariante

on peut supposer $\delta \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \frac{\log\left|\left(\mathcal{P}^R \circ U^m{}_{|C}\right)_{m\in F}\right|}{|F|} \leq h(U) + \varepsilon$$

<u>L3</u> $\Rightarrow$ pour $n$ grand, on a $X_n \subseteq X$, $\mu(X_n) \geq 1-\delta \geq 1-\varepsilon$

$\forall x \in X_n$, $K_T(F_n, x)$ est $(\{1\}, \delta)$-invariante.

Si $C \cap X_n \neq \emptyset$ : on impose en plus que $x_c \in X_n$ $\quad (x_c \in X_n \cap C)$

$$\frac{1}{|K_T(F_n, x_c)|} \log \left| (\mathcal{P}^R \circ U_{|C}^m)_{m \in K_T(F_n, x_c)} \right| \leq h(U) + \varepsilon$$

Si $C \cap X_n = \emptyset$

$$\frac{1}{|K_T(F_n, x_c)|} \log \left| (\mathcal{P}^R \circ U_{|C}^m)_{m \in K_T(F_n, x_c)} \right| \leq \log |\mathcal{P}^R|$$

Au total, $\frac{1}{|F_n|} H\left(\mathcal{P}^{F_n} | (Q_h^T)^{I_n}\right) \leq \underbrace{\sum_{C \cap X_n \neq \emptyset} \mu(C)}_{\leq 1} \left(h(U) + \varepsilon\right)$

$$+ \underbrace{\sum_{C \cap X_n = \emptyset} \mu(C)}_{\leq \varepsilon \text{ car } \mu(X_n^c) \leq \varepsilon} \log |\mathcal{P}^R|$$

$$\leq h(U) + \varepsilon + \varepsilon \log |\mathcal{P}^R|$$

<u>Conclusion</u> : $\underbrace{h(T, \mathcal{P})}_{U\text{-uniforme}} \leq \frac{H(\mathcal{P}^{F_n})}{|F_n|} \leq ② + ①$

$$\leq h(U) + \varepsilon + \varepsilon \log(\mathcal{P}^R) + \frac{1}{h} H(Q_h^T)$$

$\varepsilon \to 0$, $\inf_h$ :

$$h(T, \mathcal{P}) \leq h(U) + \tilde{h}(K_T)$$

(ii) $\Rightarrow$ $\sup_{\mathcal{P}\ U\text{-uniforme}}$ : $\quad h(T) \leq h(U) + \tilde{h}(K_T)$

<u>Preuve du lemme 2</u> $\quad \tilde{h}(K_T) = \inf_h \frac{1}{h} H(Q_h^T)$

$Q_h^T = K_T(h, \cdot)$

$H(Q_h^T)$ mesure l'incertitude de la valeur de $K_T(h, x)$ pour "$x$ inconnu"

D'après (IC) : $K_T(h,x) = \sum_{l=0}^{h-1} c_T(T^l(x))$

l'incertitude de $K_T(h,x)$ dépend de celle des $c_T(T^l(x))$

On veut $\mathcal{P}_h$ partition d'observable s'exprimant en fonction des $c_T(T^l(\cdot))$

tel que $\underbrace{\frac{H(Q_h^T \mid \mathcal{P}_h)}{h}}$ petit, $\underbrace{\frac{H(\mathcal{P}_h)}{h}}$ petit

on va lever de l'incertitude sur les $c_T(T^l(\cdot))$ ...

... mais pas trop

ex : $\mathcal{P}_h = (c_T(T^l(\cdot)))_{0 \leq l \leq h-1}$

$\to$ trop grossier

$$f_r = c_T \times \mathbb{1}_{c_T \notin [\![-r, r]\!]}$$

$$\mathcal{P}_h = (f_r \circ T^i)_{0 \leq i \leq h-1}$$

$P \in \mathcal{P}_h$, $P$ donne pour tout $0 \leq i \leq h-1$

ou bien la valeur exacte de $c_T(T^i x)$ (si $\notin [\![-r, r]\!]$)

ou bien l'information "$c_T(T^i x) \in [\![-r, r]\!]$" (car $f_r \circ T^i(x) = 0$)

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $r$ assez grand, $H(f_r) \leq \varepsilon$

ainsi $\frac{H(\mathcal{P}_h)}{h} = \frac{1}{h} H\left((f_r \circ T^i)_{0 \leq i \leq h-1}\right) \leq \frac{1}{h}\, h\, H(f_r) \leq \varepsilon$

$$H(Q_h^T \mid \mathcal{P}_h) = \sum_{P \in \mathcal{P}_h} \mu(P)\, \underbrace{H_{\mu_P}(Q_{h\,|P}^T)}_{\leq \log |Q_{h\,|P}^T| = \log(|K_T(h,\cdot)_{|P}|)}$$

$|K_T(h,\cdot)_{|P}|$ : cardinal de l'image.

$$K_T(h,\cdot)_{|P} = \sum_{i=0}^{h-1} \underbrace{c_T(T^i(\cdot))_{|P}}$$

- constante sur $P$
- $\in [\![-r, r]\!]$

$\to$ au plus $(2r+1)$ valeurs

donc $|K_T(k,\cdot)_{|P}| \leq k(2r+1)$

$$H(Q_k^T \mid \mathcal{P}_k) \leq \sum_{P\in\mathcal{P}_k} \mu(P) \underbrace{\log(k(2r+1))}_{\leq \varepsilon k \text{ pour } k \text{ grand}}$$

$$\leq \varepsilon k \underbrace{\sum_{P\in\mathcal{P}_k} \mu(P)}_{1} \qquad \text{d'où } \frac{H(Q_k^T / \mathcal{P}_k)}{k} \leq \varepsilon$$

Au total, $\frac{1}{k} H(Q_k^T) \leq \frac{1}{k} H(Q_k^T / \mathcal{P}_k) + \frac{1}{k} H(\mathcal{P}_k) \leq 2\varepsilon$ pour $k$ grand

$\blacksquare$