16/05/2023

Théorème d'équivalence orbitale de Dye

Thm (Dye) Soient $T_1, T_2 \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ ergodiques $\forall A \subseteq X \quad T_1(A) = A \Rightarrow \mu(A) = 0$ ou 1

$\hookrightarrow$ A est une réunion de T_1-orbites

Alors T_1 et T_2 sont orbitalement équivalents : $\exists S \in \mathrm{Aut}(X,\mu) /$

$\forall^* x \quad S(\underbrace{\mathrm{Orb}_{T_1}(x)}_{\{T_1^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}}) = \mathrm{Orb}_{T_2}(S(x))$

de manière équivalente, $\underbrace{S T_1 S^{-1}}_{\text{le conjugué de } T_1 \text{ par } S}$ a les mêmes orbites que T_2

On va montrer le thm de Dye en montrant :

Thm' : Tout $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ ergodique est OE à l'odomètre T_0 (dyadique)

Def : $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$\mu = \left(\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)\right)^{\otimes \mathbb{N}}$

$T_0((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) = $ " $(1,0,0,0,\dots) + (x_0, x_1, x_2)$ avec retenue à droite "

$$T_0(1,1,0,1,0,0\dots) = \begin{array}{r} (1,1,0,1,0,0 \dots) \\ +(1,0,0,0,0 \dots) \\ \hline (0,0,1,1,0,0 \qquad) \end{array}$$

+ formellement : $k = \min\{i : x_i = 0\}$

$$(T_0(x_i))_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j < k \\ 1 & \text{si } j = k \\ x_j & \text{si } j > k \end{cases}$$

NB : $T_0(111\dots) = 000\dots$

Def : $s \in \{0,1\}^n$

$N_s = \{(x_i) : (x_0, \dots, x_{n-1}) = s\}$

Rq : $T_0(N_s) = N_{\tau_n(s)}$ $\qquad \tau_n(s) = $ " $s + (1,0,\dots,0)$ avec retenue à droite "

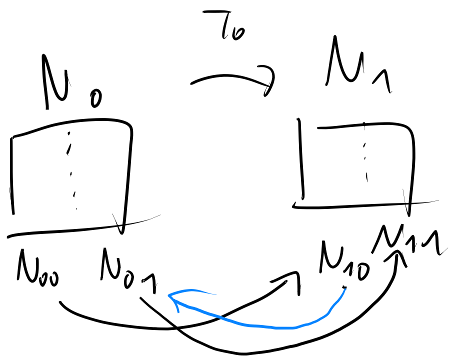
$\mu(N_s) = \dfrac{1}{2^n}$ $\quad (n = |s|)$

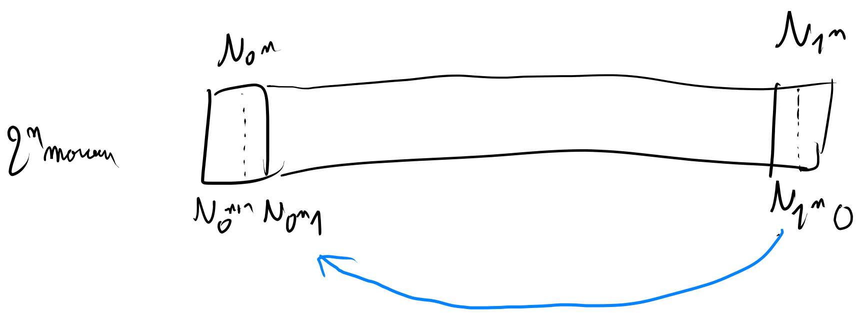
$\quad \parallel$

$\mu(T_0(N_s))$

Notat° : 0^n : suite de longueur n avec que des 0

$\left(T_0^k(N_{0^n})\right)_{k=0}^{2^n-1}$ partit° de X





Def : Soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ ergodique

$R_T := \{ (x, T^k(x)) : k \in \mathbb{Z} \}$ relat° d'équivalence pmp

(+ généralement si $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ pmp $\rightsquigarrow R_\Gamma = \{ (x, \gamma\cdot x) : \gamma \in \Gamma \}$)

$\rightsquigarrow$ le groupe plein de R relat° d'éq pmp est :

$$[R] = \{ U \in \mathrm{Aut}(X,\mu) : (x, U(x)) \in R \ \forall^* x \}$$

le pseudo groupe plein de R est

$$[[R]] = \{ \varphi : \underset{X}{\overset{}{\mathrm{dom}\,\varphi}} \to \mathrm{img}\,\varphi \quad \mathrm{dom}\,\varphi \subseteq X,\ \mathrm{img}\,\varphi \subseteq X$$

$\forall x \in \mathrm{dom}\,\varphi \quad (x, \varphi(x)) \in R$

φ bij pmp pour les mesures induites $\}$

NB : Soit $U : X \to X$ injective tq $\forall x, (x, U(x)) \in R_\Gamma \quad (\Gamma \curvearrowright (X,\mu))$
alors $U \in [R]$

En effet $\Gamma = \{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$

et $A_n = \{x \in X : U(x) = \gamma_n \cdot x\}$, A_n recouvre X

$B_n = A_n \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_{n-1})$, B_n partition de X

$\forall x \in B_n$, $U(x) = \gamma_n \cdot x$

U inj $\rightarrow$ $(U(B_n))$ sont deux à deux disjoints

$\gamma_n B_n$

$$B_n \xrightarrow[\gamma_n]{T} \gamma_n B_n \qquad \sum \mu(U(B_n)) = \sum \mu(B_n) = 1$$

$\longrightarrow$ $(U(B_n))$ est une partition de X à mesure nulle près.

($T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ ergo fixée) $\longrightarrow$ U est une bij pmp

Déf : Une *échelle* est $\varphi \in [[R_T]]$ tq $\exists n \in \mathbb{N}$

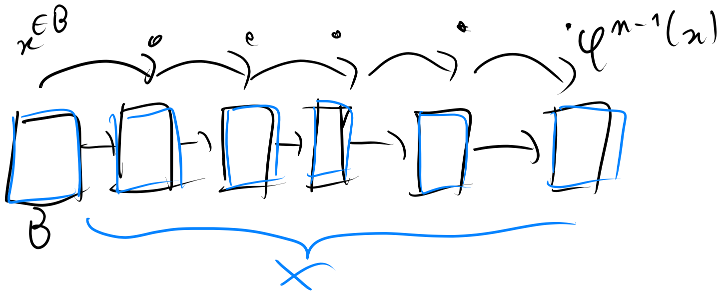
avec, si $B = \mathrm{dom}\,\varphi \setminus \mathrm{img}\,\varphi$ (la base de l'échelle)

$$X = B \sqcup \varphi(B) \cdots \sqcup \varphi^{n-1}(B)$$

↑ en particulier $\mathrm{dom}\,\varphi \supseteq \varphi(B), \dots, \varphi^{n-2}(B)$

le n est unique, c'est la *hauteur* de l'échelle φ

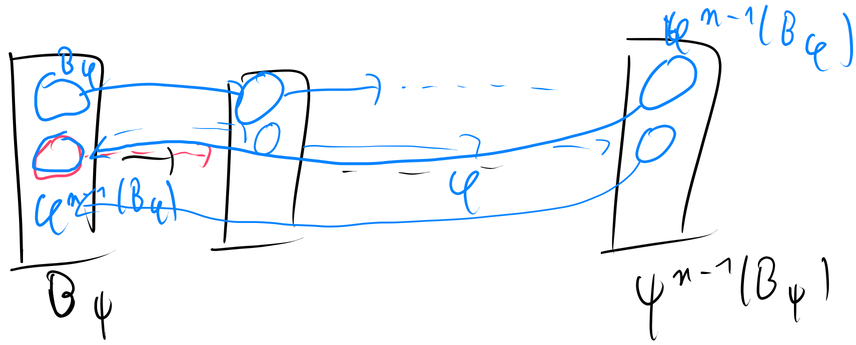
Ex : $T_0 \restriction X \setminus N_{1k}$ est une échelle de hauteur 2^k, de base N_{0k}



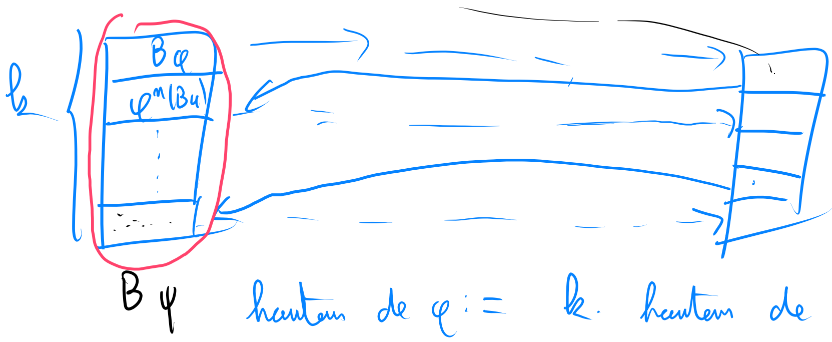
NB : $B_\varphi = X \setminus \mathrm{img}\,\varphi$

Lemme : Si φ et ψ sont deux échelles et φ plonge ψ alors la hauteur φ est un multiple de celle de ψ

Preuve : la base de φ est $\subseteq$ dans celle de ψ



$n :=$ hauteur de ψ



hauteur de $\varphi :=$ $k \cdot$ hauteur de ψ $\square$

Rmq : sachant que φ prolonge ψ, φ est complètement déterminé par la "transformation partielle de 1er retour sur B_ψ"

qui est $\varphi^n \restriction B_\psi$, qu'on peut voir comme une échelle sur (B_ψ, μ_{B_ψ})

Prop : T ergodique. Soit (φ_k) échelles de hauteur 2^{n_k}, φ_{k+1} prolonge φ_k, alors $\bigcup_k \varphi_k$ est conjuguée à un odomètre.

$(\mu \operatorname{dom} \varphi_k = \mu(\operatorname{img} \varphi_k) = 1 - 2^{-n_k} \to 1)$

dès lors que $\bigcup_k \operatorname{MAlg}(\varphi_k)$ est dense dans $\operatorname{MAlg}(X,\mu) = \{A \subseteq X\}/\sim_\mu$

$$\operatorname{MAlg}(\varphi) = \operatorname{Alg}(B_\varphi, \varphi(B_\varphi), \dots, \varphi^{n-1}(B_\varphi))$$

φ de hauteur n

$\left(d_\mu(A,B) = \mu(A \Delta B) \right.$ complète $\left. \right)$

Pr : schéma de preuve : OPS $n_k = k$

étape k :

$N_{0^k} \longrightarrow B_{\varphi_k}$

$T_0^i(N_{0^k}) \longrightarrow \varphi_k^i(B_{\varphi_k})$

$\operatorname{MAlg}(N_s : |s| = k)$

$\downarrow$

$\operatorname{MAlg}(\varphi_k)$

étape $k+1$: la même construct° prolonge la construct° précédente

$\rightsquigarrow$ on envoie $\overline{\bigcup_k MAlg(\varphi_k)}$ sur $\overline{\bigcup MAlg(N_s)}$ via S

de manière (U, T_0) - équivariante

$U_0 = \bigcup \varphi_k$

on prolonge S en un iso entre $MAlg(X, \mu)$ et $MAlg(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \frac{1}{2}(\delta_0+\delta_1)^{\otimes \mathbb{N}})$

en passant au complété, en utilisant la densité, on a

$\forall A \in MAlg(X, \mu) \quad S U_0(A) = T_0 S(A)$ $\square$

Pour prouver le thm de Dye on va construire φ_k dans $[[R_T]]$ comme ci-dessus

($\bigcup_k MAlg(\varphi_k)$ dense)

de sorte $U_0 = \bigcup_k \varphi_k$ aie les mêmes orbites que T.

La construct° des φ_k se fera par récurrence via les 2 lemmes suivants, utilisés respectivement aux étapes k pair / k impair de la construct°

Lemme 1 (pour avoir un odomètre) Soit $\psi \in [[R_T]]$ une échelle de hauteur m

Soit $A \in MAlg(X, \mu)$, $\varepsilon > 0$. Pour n assez grand, il existe une échelle φ de hauteur nm qui prolonge ψ

avec $A \in_\varepsilon MAlg(\varphi)$ (par déf, $\exists A' \in MAlg(\varphi)$ $\mu(A \Delta A') < \varepsilon$)

R_φ = relat° d'éq engendrée par φ

$\{(\varphi^i(x), \varphi^j(x))\}_{i,j \in \mathbb{Z}}$

si ψ de hauteur n, $\forall x, |[x]_{R_\psi}| = n$

si $U = \bigcup_k \varphi_k$, $R_U = \bigcup_k R_{\varphi_k}$

Lemme 2 (pour capturer les orbites) Soit ψ échelle de hauteur m

si $\varepsilon > 0$, pour n assez gd, $\exists \varphi$ prolonge ψ de hauteur nm

tq $\mu(\{x \in X \mid (x, T(x)) \notin R_\varphi\}) < \varepsilon$

Preuve du thm à partir des lemmes :

On fixe (A_k) dense dans $MAlg(X,\mu)$ tq $\forall k$ $\{k' : A_{k'} = A_k\}$ est infini

lemme 1 et 2 $\rightsquigarrow$ par réc, φ_k de hauteur 2^{n_k} tq

① $A_k \in_{2^{-k}} MAlg(\varphi_k)$

② $\mu(\{x \in X \mid (x, T(x)) \notin R_{\varphi_k}\}) < 2^{-k}$

$U = \bigcup_k \varphi_k$ est conjugué à un odomètre (d'après la prop + ①)

et ② $\Rightarrow$ $\mu(\{x \in X \mid (x, T(x)) \notin R_U\}) = 0$ $\quad R_{\varphi_k} \subseteq R_U$

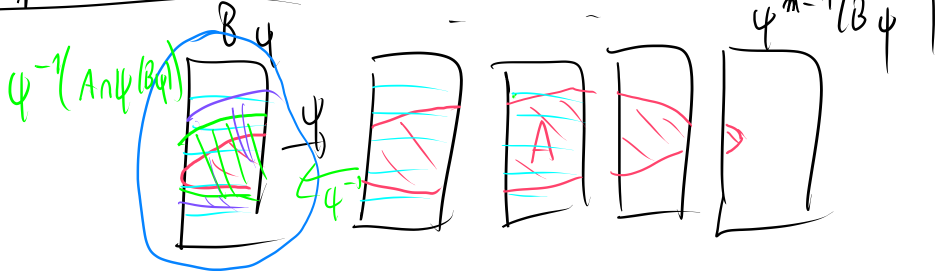
autrement dit T et U ont les m̂ orbites à mesure nulle près. □ th

Le lemme 1 utilise l'ergodicité et l'énoncé suivant :

⊗

Lemme : Soit $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ ergo, $A, B \subseteq X$, $\mu(A) = \mu(B)$
alors $\exists \varphi \in [[R_\Gamma]]$ / $\mathrm{dom}\,\varphi = A$
$\mathrm{img}\,\varphi = B$

Schéma de preuve du lemme 1



$\varepsilon > 0$ $\quad$ $\mathcal{P}$ partiᵒ de B_φ engendrée par les $\varphi^{-i}(A \cap \varphi^i(B_\varphi))$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{P}$ est une partitᵒ finie de B_φ

$\delta > 0$ $\quad$ Pour n assez gd, il existe Q partiᵒ de B_φ en pièces de

$\delta < \frac{\varepsilon}{2^m}$ $\quad$ m̂ mesure tq $\forall P \in \mathcal{P}$

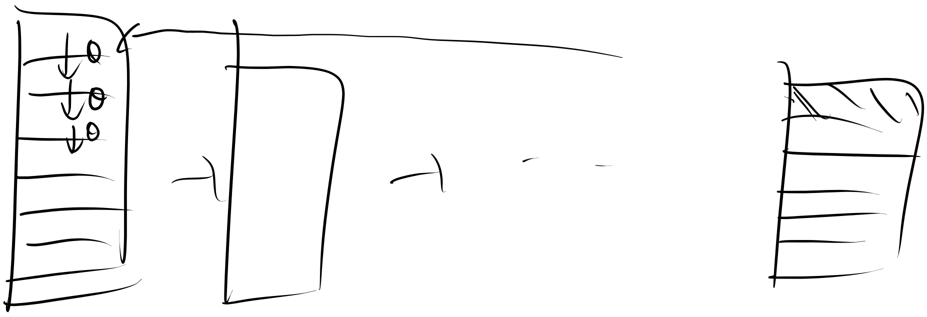
$$P \in_\delta MAlg(Q)$$

$$Q \overset{\text{lemme}}{=} MAlg(\theta), \quad \theta \text{ échelle sur } B_\varphi$$

$\{Q_0, \dots, Q_{n-1}\} \rightsquigarrow \theta(Q_0) = Q_1 \; \dots \; \theta(Q_{n-2}) = Q_{n-1}$

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in \mathrm{dom}\,\varphi \\ \theta\,\varphi^{-m}(x) & \text{si } x \in \varphi^m(B_\varphi \cap \mathrm{dom}\,\theta) \end{cases}$$

□



Lemme 2' (pour capturer les orbites) Soit ψ échelle de hauteur m

(suffit si $\varepsilon > 0$), $\exists$ n assez gd, $\exists$ φ prolonge ψ de hauteur $2^n m$

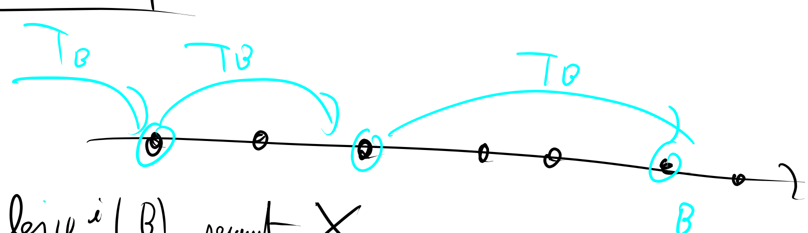
$$\text{tq } \mu(\{x \in X \mid (x, T(x)) \notin R_\varphi\}) < \varepsilon$$

Schéma de preuve du lemme 2 :

Soit B la base de ψ, on a T_B : transfo induite par T sur B

$$T_B(x) = \begin{cases} T^n(x) \text{ où } n = \min\{k \geq 1 : T^k(x) \in B\} \text{ et } x \in B \\ x \text{ si } x \notin B \end{cases}$$

$$\boxed{R_T = R_{T_B} \vee R_\psi}$$ en effet $R_T \cap (B \times B) = R_{T_B} \cap (B \times B)$

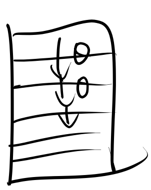


les $\psi^i(B)$ recouvrent X

Pour capturer mieux les T orbites, φ doit "mieux capturer T_B"

$\rightsquigarrow$ on construit une échelle θ sur B_ψ qui "capture bien T_B"

B



Lemme de Rokhlin : $\forall \varepsilon > 0$, $\forall N$, $\exists A \subseteq B$

$A, T_B(A), \dots, T_B^{N-1}(A)$ disj

$\mu(B \setminus \underbrace{A \sqcup T_B(A) \dots \sqcup T_B^{N-1}(A)}) < \varepsilon$

$\varepsilon > 0 \rightarrow \Theta_{\varepsilon,N}(x) = T_B(x)$ si $x \in A \sqcup \dots \sqcup T_B^{N-1}(A)$
N

En utilisant le lemme $\circledast$, on peut prolonger $\Theta_{\varepsilon,N}$ en une échelle $\tilde{\Theta}_{\varepsilon N}$

et par construction $\mu(\{x \in B \mid (x, T_B(x)) \notin R_{\tilde{\Theta}_{\varepsilon,N}}\}) < \varepsilon + \frac{\mu(B)}{N}$

$\rightsquigarrow \varphi_{\varepsilon,N}$ l'échelle sur X prolongeant ψ utilisant Θ,

$\mu(\{x \in B \mid (x, T_B(x)) \notin R_{\varphi_{\varepsilon,n}}\}) < \varepsilon + \frac{\mu(B)}{N}$

$\rightsquigarrow (\varphi_i)$ qui prolonge ψ / $\mu(x \in B : (x, T_B(x)) \notin R_{\varphi_i}) < \frac{1}{2^i}$

$\uparrow$ de hauteur $\underline{m \times 2^{k_i}}$

B-C : $\forall^* x \in B$ il n'y a qu'un nb fini de i tq $(x, T_B(x)) \notin R_{\varphi_i}$

$\forall^* \underbrace{x \in B}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ ———— $(x, T_B^k(x)) \notin R_{\varphi_i}$

$B_0 \subseteq B$ de mesure pleine

$\rightsquigarrow \forall^* x$ il n'y a qu ———— de i tq $(x, T(x)) \notin R_{\varphi_i}$

$R_T = R_{T_B} \vee \underbrace{R_\psi}_{\subseteq R_\varphi}$ $\forall x \in \bigsqcup_{i=0}^{m-1} \psi^i(B)$

$\rightsquigarrow$ Pour i suffisamment gd, $\mu(\{x \in X \mid (x, T(x)) \notin \underline{R_{\varphi_i}}\}) < \varepsilon$

on prolonge $\varphi = \varphi_i$ $\square$