25/04/23

Groupe de travail : équivalence orbitale et entropie.

I Introduction.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace de probabilité

$\mathrm{Aut}(X, \mathcal{A}, \mu) = \{ f : X \to X$ bijection bimesurable, qui préserve la mesure $f_* \mu = \mu \} / =_{\mu \text{ p.p.}}$

On supposera toujours que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est standard, c'est-à-dire que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est isomorphe à $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ avec Y espace métrique séparable, $\mathcal{B}_0$ la tribu borélienne sur Y, ν mesure de proba sur $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ le complété de $\mathcal{B}_0$ par rapport à ν.

<u>Remarque</u> : on veut éviter les espaces de proba trop gros : si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est standard, $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ est séparable.

<u>Thèmes du GT :</u>

- équivalence orbitale (quantitative / restreinte) :

  Définition : $T, S \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ sont orbitalement équivalentes s'il existe $\phi \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ tq pour μ pt $x \in X$,
  $$\phi(\mathrm{Orb}_T(x)) = \mathrm{Orb}_S(\phi(x))$$
  où $\mathrm{Orb}_T(x) = \{ T^n(x) \mid n \in \mathbb{Z} \}$

- entropie : invariant numérique associé $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$

<u>Fil directeur</u> : comprendre quand est-ce que l'entropie est préservée par équivalence orbitale.

Remarque : en général, l'entropie n'est pas préservée par OE (orbite équivalence)

II Définition de l'entropie.

entropie, entropie métrique, entropie mesurée, entropie de Kolmogorov-Sinaï, entropie dynamique.

II 1) Partition et entropie de Shannon.

Définition : Une partition de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est $\mathcal{P} = (A_k)_{k \in I}$, I au plus dénombrable, $A_k \in \mathcal{A}$ tel que :

- $A_k \cap A_\ell = \emptyset$ $k \neq \ell$
- $\bigcup_{k \in I} A_k = X$

$\Big\}$ à mesure nulle près.

Définition : L'entropie de Shannon d'une partition $\mathcal{P}$ de (X, μ) est

$$H_\mu(\mathcal{P}) = -\sum_{A \in \mathcal{P}} \mu(A) \log \mu(A) \in [0, +\infty]$$

Convention : $f : x \mapsto -x \log x$ convexe, prolongée par continuité en 0 : $f(0) = 0$.

Entropie conditionnelle : Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux partitions :

$$H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{Q}) = \sum_{\substack{B \in \mathcal{Q} \\ (\mu(B) > 0)}} \mu(B) H_{\mu_B}(\mathcal{P})$$

où $\mu_B(A) = \dfrac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}$.

Quelques propriétés :

(i) $$H(\mathcal{P}/\mathcal{Q}) = -\sum_{\substack{B \in \mathcal{Q} \\ A \in \mathcal{P}}} \mu(A \cap B) \left[\log \mu(A \cap B) - \log \mu(B) \right]$$

$$\boxed{H(\mathcal{P}/\mathcal{Q}) = H(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) - H(\mathcal{Q})}$$

où $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ (joint de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = (A \cap B)_{\substack{A \in \mathcal{P} \\ B \in \mathcal{Q}}}$.

(ii) $H(\mathcal{P}/\mathcal{Q}) = 0 \iff \forall B \in \mathcal{Q}, \exists A \in \mathcal{P}$ tq $B \subseteq A$.

$\mathcal{Q}$ raffine $\mathcal{P}$, noté $\cancel{\mathcal{Q} \preccurlyeq \mathcal{P}}$. $\mathcal{P} \preccurlyeq \mathcal{Q}$

(iii) $H(\mathcal{P}/\mathcal{Q}) \leq H(\mathcal{P})$ et donc $H(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq H(\mathcal{P}) + H(\mathcal{Q})$.

Preuve : Si $A \in \mathcal{P}$,

$$\sum_{B \in \mathcal{Q}} -\mu(B) \underbrace{\mu_B(A \cap B) \log \mu_B(A \cap B)}_{f(\mu_B(A \cap B))}$$

$$\leq f\Big(\sum_{B \in \mathcal{Q}} \mu(B) \mu_B(A \cap B) \Big) \quad \text{convexité de } f.$$

$$= f(\mu(A)) = -\mu(A) \log \mu(A)$$

en sommant on obtient $H(\mathcal{P}/\mathcal{Q}) \leq H(\mathcal{P})$.

(iv) Si $\mathcal{Q}_1 \preccurlyeq \mathcal{Q}_2$ ($\mathcal{Q}_2$ raffine $\mathcal{Q}_1$), alors $H(\mathcal{P}/\mathcal{Q}_2) \leq H(\mathcal{P}/\mathcal{Q}_1)$.

Si $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ et $\mathcal{P}$ est une partition $= (A_k)_{k \in I}$. $T^{-n}\mathcal{P} = (T^{-n}(A_k))_{k \in I}$

$T^{-n}\mathcal{P}$ reste une partition.

On définit $\mathcal{P}^n = \bigvee_{m=0}^{n-1} T^{-m}\mathcal{P} = \mathcal{P} \vee T^{-1}\mathcal{P} \vee \dots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{P}$.

Définition : $\mathcal{P}$ est génératrice pour $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ si $\overline{\sigma(\mathcal{P}^n, n \in \mathbb{Z})}$ est égale à $\mathcal{A}$.
$\mathcal{P}$ est génératrice si la plus petite tribu complète, T-invariante est égale à $\mathcal{A}$.

Si $\mathcal{P}$ est une partition, on a un codage :

$$q : X \to \mathcal{P}^{\mathbb{Z}}$$
$$x \mapsto (\text{l'unique } A \in \mathcal{P} \text{ tq } T^{n}(x) \in A)_{n \in \mathbb{Z}}$$

Si $D : \mathcal{P}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{P}^{\mathbb{Z}}$, $D((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (x_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$, q est équivariante :

$$q \circ T = D \circ q$$

Si $\nu = q_* \mu$. Alors $q : (X, \mu) \to (\mathcal{P}^{\mathbb{Z}}, \nu)$ est un isomorphisme mesuré ssi $\mathcal{P}$ est génératrice. (q est toujours essentiellement surjective)

Définition : (X, μ) (Y, ν) deux espaces de proba, $\phi : (X, \mu) \to (Y, \nu)$ est un isomorphisme mesuré si :
(i) $\phi_* \mu = \nu$
(ii) ϕ est égale (à mesure nulle près) à une bijection bimesurable $X \to Y$.

(ii') : $\exists X_0 \subseteq X$ $\mu(X_0) = 1$, $Y_0 \subseteq Y$, $\nu(Y_0) = 1$ tq $\phi : X_0 \to Y_0$ est une bijection bimesurable.

II.2) Entropie de $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$

Soit $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ et $\mathcal{P}$ partition, $H(\mathcal{P}) < +\infty$.

La suite $H(\mathcal{P}^n)$ est sous-additive :

$$H(\mathcal{P}^{n+m}) = H(\mathcal{P}^n \vee T^{-n}(\mathcal{P}^m))$$
$$\leq H(\mathcal{P}^n) + H(T^{-n}(\mathcal{P}^m)) \qquad (i)$$
$$= H(\mathcal{P}^n) + H(\mathcal{P}^m) \qquad \text{car } T \text{ préserve la mesure,}$$

Par le lemme de Fekete,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{H_\mu(\mathcal{P}^n)}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{H_\mu(\mathcal{P}^n)}{n} =: h_\mu(T, \mathcal{P})$$

entropie de $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ relativement à $\mathcal{P}$.

Définition : $h_\mu(T) = \sup \{ h_\mu(T, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ partition tq } H(\mathcal{P}) < +\infty \} \in [0, +\infty]$

Théorème (KOLMOGOROV-SINAI) : Soit $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ et $\mathcal{P}$ partition $H(\mathcal{P}) < +\infty$.
Si $\mathcal{P}$ est génératrice, alors $h_\mu(T) = h_\mu(T, \mathcal{P})$.

Remarque : cf prochaine séance : ROKHLIN $h_\mu(T) = \inf \{ H_\mu(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ partition génératrice} \}$

Conséquence : Soit A ens. fini, $X = A^{\mathbb{Z}}$, D le décalage sur X.
Si $\nu \in \mathrm{Prob}(A)$, $h_{\nu^{\otimes \mathbb{Z}}}(D) = H_\nu(\mathcal{P})$ où $\mathcal{P} = (P_a)_{a \in A}$

$$P_a = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid x_0 = a \}.$$

$\mathcal{P}$ est génératrice pour D : $\mathcal{P}^n = (P_{a_0, \dots, a_{n-1}})_{a_0, \dots, a_{n-1} \in A}$ $n \in \mathbb{Z}$.

$$P_{a_0, \dots, a_{n-1}} = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid x_0 = a, x_{-1} = a_1, \dots, x_{-(n-1)} = a_{n-1} \}$$

engendrent la tribu produit sur $A^{\mathbb{Z}}$.

$$h_{\nu^{\otimes \mathbb{Z}}}(D) \underset{KS}{=} h_{\nu^{\otimes \mathbb{Z}}}(D, \mathcal{P}) = \lim \frac{H_\nu(\mathcal{P}^n)}{n}$$

Mais $$H_{\nu^{\otimes \mathbb{Z}}}(\mathcal{P}^n) = \sum_{a_0, \dots, a_{n-1} \in A} -\nu^{\otimes \mathbb{Z}}(P_{a_0, \dots, a_{n-1}}) \log \underbrace{\nu^{\otimes \mathbb{Z}}(P_{a_0, \dots, a_{n-1}})}_{\nu(a_0) \dots \nu(a_{n-1})}$$

$$= n \sum_{a \in A} -\nu(a) \log \nu(a)$$

$$= n H_\nu(\mathcal{P}).$$

Donc $$h_{\nu^{\otimes \mathbb{Z}}}(D) = -\sum_{a \in A} \nu(a) \log \nu(a)$$

Conséquence : Si $T, S \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ sont mesurablement isomorphes, alors $h_\mu(T) = h(T')$

Définition : $T, S \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ sont mesurablement isomorphes, s'il existe $\phi \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ tq $\forall \mu$ p.t $x \in X$, $\phi \circ T(x) = S \circ \phi(x)$.

Corollaire : Si deux décalages de Bernoulli $D_A : (A^{\mathbb{Z}}, \nu_A^{\mathbb{Z}})$ $D_B : (B^{\mathbb{Z}}, \nu_B^{\mathbb{Z}})$ sont mesurablement isomorphes, alors $H(\nu_A) = H(\nu_B)$
(Réciproque vraie : ORNSTEIN)

Exemple de MESHALKIN : $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, $\nu_A = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$
$B = \{b_0, b_1, b_2, b_3, b_4\}$ $\nu_B = (1/2, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8)$
$H(\nu_A) = H(\nu_B)$.

Démonstration du théorème de K-S :

$T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$, $\mathcal{P}$ partition génératrice. On va montrer que $\forall \mathcal{Q}$ partition d'entropie finie, on a $h_\mu(T, \mathcal{Q}) \leq h_\mu(T, \mathcal{P})$.
$h_\mu(T) = \sup \{ h_\mu(T, \mathcal{Q}) \mid \mathcal{Q} \text{ partition d'entropie finie} \}$.

Cas n°1 : $\exists N$ tq $\mathcal{Q} \preccurlyeq \bigvee_{i=-N}^{N} T^{-i}\mathcal{P}$.

$\mathcal{P} \preccurlyeq \mathcal{Q}$ $\mathcal{Q}$ raffine $\mathcal{P}$
Dans ce cas $H(\mathcal{P}) \leq H(\mathcal{Q})$

$$h_\mu(T, \mathcal{Q}) \leq h_\mu\Big(T, \bigvee_{i=-N}^{N} T^{-i}\mathcal{P}\Big) \qquad (iv)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{H_\mu\Big(\bigvee_{i=-N}^{N+n-1} T^{-i}\mathcal{P}\Big)}{n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\frac{2N+n}{n}}_{\to 1} \frac{H_\mu\left(\bigvee_{i=-N}^{N+n-1} T^{-i}\mathcal{P}\right)}{2N+n}$$

$$= \lim \frac{H_\mu\left(T^N \mathcal{P}^{2N+n}\right)}{2N+n}$$

$$= h_\mu(T, \mathcal{P})$$

<u>Cas général</u> :

<u>Lemme 1</u> : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists Q_\varepsilon < \bigvee_{i=-N}^{N} T^{-i}\mathcal{P}$ tq $H(Q|Q_\varepsilon) + H(Q_\varepsilon|Q) < \varepsilon$

<u>Preuve</u> : probablement la prochaine séance.

<u>Remarque</u> : $H(Q|Q_\varepsilon) + H(Q_\varepsilon|Q)$ est une distance sur l'espace des partitions.

<u>Lemme 2</u> : $H(Q^n|Q_\varepsilon^n) \leq n\, H(Q|Q_\varepsilon)$ et réciproquement.

Preuve du lemme 2 : $H(Q^n|Q_\varepsilon^n) \leq \sum_{i=0}^{n-1} H(T^{-i}Q|Q_\varepsilon^n)$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} H(T^{-i}Q|T^{-i}Q_\varepsilon) \quad \text{car } T^{-i}Q_\varepsilon \leq Q_\varepsilon^n$$

$$= n\, H(Q|Q_\varepsilon). \quad \blacksquare$$

Retour au Cas général : on veut $h_\mu(T, Q) \leq h_\mu(T, \mathcal{P})$

on prend Q_ε. On a

$$|H(Q^n) - H(Q_\varepsilon^n)| = |H(Q^n|Q_\varepsilon^n) - H(Q_\varepsilon^n|Q^n)|$$

$$\underset{\text{Lemme } 1+2}{\leq} n\varepsilon.$$

Donc on en déduit que $|h_\mu(T, Q) - \underbrace{h_\mu(T, Q_\varepsilon)}_{\substack{\text{Cas n°1} \\ \leq h_\mu(T, \mathcal{P})}}| \leq \varepsilon$

Donc $h_\mu(T, Q) \leq h_\mu(T, \mathcal{P}) + \varepsilon$. $\blacksquare$

<u>III Groupes moyennables</u>

Pour définir l'entropie (lemme de Fekete) et démontrer le Thm de KS, on a utilisé que $\frac{2N+n}{n} \to 1$. (*)

(n dans (*))

<u>Définition</u> : Un groupe dénombrable Γ est moyennable si $\exists (F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties finies de Γ tq $\forall \gamma \in \Gamma$ (N dans (*))

$$\frac{|\gamma F_n \cap F_n|}{|F_n|} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

$(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Følner.

<u>Lemme</u> (ORNSTEIN-WEISS) : Soit Γ moyennable, soit $\varphi : \mathcal{P}_f(\Gamma) \to \mathbb{R}_+$ (parties finies) telle que :

(i) $\forall F \in \mathcal{P}_f(\Gamma)$, $\forall \gamma \in \Gamma$, $\varphi(\gamma F) = \varphi(F)$

(ii) $\forall E \subseteq F$ parties finies $\varphi(E) \leq \varphi(F)$

(iii) $\forall E, F \in \mathcal{P}_f(\Gamma)$, $\varphi(E \cup F) \leq \varphi(E) + \varphi(F) - \varphi(E \cap F)$.

Alors pour toute suite de Følner $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la quantité $\frac{\varphi(F_n)}{|F_n|}$ converge vers $\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varphi(F_n)}{|F_n|}$ et cette quantité est indépendante de la suite de Følner.

Si $\Gamma \leq \mathrm{Aut}(X, \mu)$ moyennable, on voudrait définir

$$h_\mu(\Gamma) = h_\mu(\Gamma \curvearrowright (X, \mu))$$

de la même façon qu'on a défini $h_\mu(T) = h_\mu(\langle T \rangle \curvearrowright (X, \mu))$

Si $\mathcal{P}$ est une partition et $F \subseteq \Gamma$, on définit $\mathcal{P}^F = \bigvee_{\gamma \in F} \gamma^{-1}\mathcal{P}$.

on vérifie que $F \in \mathcal{P}_f(\Gamma) \to H(\mathcal{P}^F)$ satisfait les hypothèses du lemme d'Ornstein-Weiss.

(i) clair

(ii) croissance : $H(\mathcal{P} \vee Q) \leq H(\mathcal{P}) + H(Q)$

(iii) sous-additivité forte : $E, F \in \mathcal{P}_f(\Gamma)$

$$H(\mathcal{P}^{E \cup F}) - H(\mathcal{P}^E) = H(\mathcal{P}^{F \setminus E} \vee \mathcal{P}^E) - H(\mathcal{P}^E)$$

$$= H(\mathcal{P}^{F \setminus E} | \mathcal{P}^E)$$

$$\leq H(\mathcal{P}^{F \setminus E} | \mathcal{P}^{E \cap F}) \quad \text{car } \mathcal{P}^E \text{ raffine } \mathcal{P}^{E \cap F}$$

$$= H(\mathcal{P}^{F \setminus E} \vee \mathcal{P}^{E \cap F}) - H(\mathcal{P}^{E \cap F})$$

$$= H(\mathcal{P}^F) - H(\mathcal{P}^{E \cap F})$$

<u>Définition</u> (ORNSTEIN-WEISS) : Si $\Gamma \leq \mathrm{Aut}(X, \mu)$ moyennable, $\mathcal{P}$, $H(\mathcal{P}) < +\infty$

$$h_\mu(\Gamma \curvearrowright (X, \mu), \mathcal{P}) = \lim \frac{H(\mathcal{P}^{F_n})}{|F_n|} = \inf \frac{H(\mathcal{P}^{F_n})}{|F_n|}$$

pour n'importe quelle suite de Følner

$$h_\mu(\Gamma \curvearrowright (X, \mu)) = \sup \{ h_\mu(\Gamma \curvearrowright (X, \mu), \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\ H(\mathcal{P}) < +\infty \}$$

Théorème de KS vrai

<u>Avant goût</u> : on démontrera le théorème des générateurs de Rohlin

on démontrera que la finitude de l'entropie est préservée par équivalence orbitale Shannon.

En fait l'entropie est préservée par équivalence orbitale Shannon.

<u>Références</u> :
Ergodic theory (KERR-LI)

Entropy in dynamical system (DOWNAROWICZ)

Restricted orbit equivalence for actions of discrete amenable groups (RUDOLF-KAMMEYER)