Théorème des générateurs de Rokhlin

Aujourd'hui :
- Thm des générateurs de Rokhlin
- équivalence orbitale Shannon.

Rappel : $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ partition. On dit que $\mathcal{Q}$ raffine $\mathcal{P}$, noté $\mathcal{P} \preccurlyeq \mathcal{Q}$, si $\forall B \in \mathcal{Q}$, $\exists A \in \mathcal{P}$ tq $B \subseteq A$.

$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \{ A \cap B \mid A \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{Q} \}$ la plus petite partition qui raffine $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

Théorème (Rokhlin, 1967) : Soit $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ ergodique.
Alors
$$h(T) = \inf \{ H(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ partition génératrice pour } T \}$$

Plusieurs généralisations :

Théorème (Seward, Tucker-Drob, 2016) : Soit $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ pmp libre ergodique de Γ moyennable.
$$h(\Gamma \curvearrowright (X, \mu)) = \inf \{ H(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ partition génératrice pour } \Gamma \curvearrowright (X, \mu) \}$$

Autre "généralisation" :

Théorème (Krieger) : Soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ ergodique. Si $h(T) < \log(n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, alors il existe une partition génératrice de T constituée de n pièces.

I Équivalence orbitale Shannon.

équivalence orbitale "quantitative".

Soit $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ et $\Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ deux actions pmp libres.

Elles sont orbitalement équivalentes s'il existe $\varphi : X \to Y$ bijection bimesurable, $\varphi_* \mu = \nu$, telle que pour μ presque tout $x \in X$, $\varphi(\mathrm{Orb}_\Gamma(x)) = \mathrm{Orb}_\Lambda(\varphi(x))$.

φ : équivalence orbitale.

φ donne deux cocycles :

$$\sigma : \Gamma \times X \to \Lambda$$

$$\tau : \Lambda \times Y \to \Gamma$$

définis presque partout par les relations suivantes :

$$\varphi(\gamma \cdot x) = \sigma(\gamma, x) \cdot \varphi(x) \qquad \forall \gamma \in \Gamma,\ x \in X$$

$$\varphi(\tau(\lambda, y) \cdot \varphi^{-1}(y)) = \lambda \cdot y \qquad \forall \lambda \in \Lambda,\ y \in Y$$

Ces cocycles vérifient les propriétés suivantes :

(i) identité du cocycle :

$$\sigma(\gamma\gamma', x) = \sigma(\gamma, \gamma' \cdot x)\,\sigma(\gamma', x) \qquad \forall \gamma, \gamma' \in \Gamma,\ x \in X$$

$$\tau(\lambda\lambda', y) = \tau(\lambda, \lambda' \cdot y)\,\tau(\lambda', y) \qquad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda,\ y \in \Lambda$$

(ii) $\sigma(-, x) : \Gamma \to \Lambda$
$\tau(-, y) : \Lambda \to \Gamma$ sont des bijections pour μ p.t. $x \in X$, ν p.t. $y \in Y$

(le actions sont libres).

<u>Définition</u> : Deux actions pmp $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ et $\Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ sont Shannon orbitalement equivalentes s'il existe une équivalence orbitale dont les cocycles associés $\sigma : \Gamma \times X \to \Lambda$ et $\tau : \Lambda \times Y \to \Gamma$ sont d'entropie de Shannon finie, au sens où :

(i) pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'entropie de Shannon de la partition

$$\mathcal{P}_\gamma = (\{x \in X \mid \sigma(x, \gamma) = \lambda\})_{\lambda \in \Lambda}$$

est finie

(ii) pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'entropie de Shannon de la partition

$$\mathcal{Q}_\lambda = (\{y \in Y \mid \tau(y, \lambda) = \gamma\})_{\gamma \in \Gamma} \text{ est finie.}$$

Théorème (Kerr - Li) : Soit Γ, Λ moyennable de type fini.
Si $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ et $\Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ sont Shannon OE, alors
$h(\Gamma \curvearrowright (X,\mu)) = h(\Lambda \curvearrowright (Y,\nu))$.

Proposition (Carderi, J., Le Maître, Tessera) : La finitude de l'entropie est préservée par équivalence orbitale Shannon parmi les actions libres ergodiques de groupes moyennables de type fini.

Preuve : $\Gamma \curvearrowright (X,\mu) \sim \Lambda \curvearrowright (X,\mu)$ libres ergodiques
id est une OE Shannon.

$\sigma : \Gamma \times X \to \Lambda$
$\tau : \Lambda \times X \to \Gamma$
d'entropie de Shannon finie.

(Seward, Tucker-Drob)
$h(\Gamma \curvearrowright (X,\mu)) = \inf \{ H(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ partition génératrice} \}$
idem pour $h(\Lambda \curvearrowright (X,\mu))$.

On va montrer que si $h(\Lambda \curvearrowright (X,\mu)) < +\infty$, alors $h(\Gamma \curvearrowright (X,\mu)) < +\infty$.

Supposons $h(\Lambda \curvearrowright (X,\mu)) < +\infty$. Donc $\exists \mathcal{P}$ partition génératrice pour $\Lambda \curvearrowright (X,\mu)$ d'entropie de Shannon finie.

Soit S un système fini de générateurs pour Γ.

$\forall s \in S, \quad \mathcal{P}_s = (\{ x \in X \mid \sigma(s,x) = \lambda \})_{\lambda \in \Lambda}$

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P} \vee \bigvee_{s\in S} \mathcal{P}_s .$$

On va montrer que $H(\mathcal{Q}) < +\infty$, et que $\mathcal{Q}$ est génératrice pour $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$.

• $$\underline{H(\mathcal{Q})} \leq \underbrace{H(\mathcal{P})}_{<+\infty} + \sum_{s\in S} \underbrace{H(\mathcal{P}_s)}_{<+\infty \text{ puisque OE Shannon.}} < +\infty$$

• $\mathcal{Q}$ est génératrice pour $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$.

Soit $x, y \in X$ tq $\mathcal{Q}(\gamma\cdot x) = \mathcal{Q}(\gamma \cdot y)$ $\forall \gamma\in\Gamma$

Ça veut dire que :

(i) $\mathcal{P}(\gamma\cdot x) = \mathcal{P}(\gamma\cdot y)$ $\forall \gamma \in \Gamma$

(ii) $\sigma(s, \gamma\cdot x) = \sigma(s,\gamma\cdot y)$ $\forall \gamma\in\Gamma, s\in S$.

Identité du cocycle + (ii) : $\sigma(\gamma, x) = \sigma(\gamma, y)$ $\forall \gamma\in\Gamma$.

Preuve : $\gamma = s_1 \cdots s_n$

$$\sigma(\gamma, x) = \overbrace{\sigma(s_1, s_2\cdots s_n x)}\ \underbrace{\sigma(s_2 \cdots s_n, x)}$$ ∎

Donc
$$\mathcal{P}(\overset{\Gamma\text{ action}}{\gamma\cdot x}) = \mathcal{P}(\overset{\Lambda\text{-action}}{\underbrace{\sigma(\gamma,x)}\cdot x})$$
$$\overset{(i)}{=} \qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{\ }$$
$$\mathcal{P}(\gamma\cdot y) = \mathcal{P}(\overbrace{\sigma(\gamma,y)}\cdot y)$$

En faisant varier γ (et puisque $\sigma(-,x)$ est une bijection) on en déduit que $\mathcal{P}(\lambda \cdot x) = \mathcal{P}(\lambda \cdot y)$

Mais $\mathcal{P}$ est génératrice pour $\Lambda \curvearrowright (X,\mu)$. Donc cette dernière condition n'est possible que sur un ens. de mesure nulle.

Donc $\mathcal{Q}$ est génératrice pour $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$. $\boxed{\Sigma}$

<u>Question</u> : Dans la preuve, on obtient la borne suivante

$$h(\Gamma \curvearrowright (X,\mu)) \leq h(\Lambda \curvearrowright (X,\mu)) + \overbrace{\sum_{s \in S} H(\mathcal{P}_s)}^{\circledast}$$

Comment faire pour modifier l'équivalence orbitale de sorte que $\circledast$ soit arbitrairement petite ? (Austin "L^1-OE" Derandomization ?)

II Le théorème des générateurs de Rohklin.

<u>Théorème</u> (Rohklin, 1967) : Soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ ergodique. Alors $h(T) = \inf\{ H(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ partition génératrice pour } T\}$

Remarque : Si $\mathcal{P}$ est une partition génératrice,

$$h(T,\mathcal{P}) \leq H(\mathcal{P})$$

Donc le seul cas où il faut démontrer quelque chose est lorsque $h(T) < +\infty$.

On va démontrer deux résultats :

Théorème 1 : Soit $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ ergodique, $h(T) < +\infty$. Alors T admet une partition génératrice d'entropie de Shannon finie.

Théorème 2 : Soit $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ ergodique, $h(T) < +\infty$. Si T admet une partition génératrice finie $\mathcal{P}$, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \mathcal{Q}$ partition génératrice tq $H(\mathcal{Q}) < h(T, \mathcal{P}) + \varepsilon$

Thm 1 + Thm 2 $\Rightarrow$ Thm des générateurs de Rohlin :
$\exists \mathcal{P}$ partition génératrice $H(\mathcal{P}) < +\infty$ (Thm 1).

$\exists \mathcal{Q}$, $\underset{\substack{\| \text{KS} \\ h(T)}}{h(T, \mathcal{Q})} \leq H(\mathcal{Q}) < \underset{\substack{\| \text{KS} \\ h(T)}}{h(T, \mathcal{P})} + \varepsilon$ (Thm 2)
$\mathcal{Q}$ génératrice

Définition : $\mathcal{P}$ partition, $B \subseteq X$, $\mathcal{P} \cap B$ partition formée des $P \cap B$, $P \in \mathcal{P}$ et B^c.

Preuve du Thm 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand pour que :

(i) $\dfrac{H(\mathcal{P}^n)}{n} < h(T, \mathcal{P}) + \varepsilon$

(ii) Pour tout $0 < t < 1/n$, $-t \log t - (1-t) \log(1-t) < \varepsilon$.

Soit δ suffisamment petit pour que $H(\mathcal{P}\cap B)<\varepsilon$, pour tout $B\subseteq X$ mesurable, $\mu(B)<\delta$.

Par le lemme de Rokhlin : $\exists\, A, B \subseteq X$ tq

$$X = A \sqcup T(A) \sqcup \ldots \sqcup T^{n-1}(A) \sqcup B$$

avec $\mu(B)<\delta$. Notons $\mathcal{R}$ cette partition.

Posons $\mathcal{Q} = (\mathcal{P}^n \cap A) \vee (\mathcal{P}\cap B)$. Montrons que $\mathcal{Q}$ vérifie ce que l'on souhaite.

- $\mathcal{Q}$ est génératrice pour T :

$$\mathcal{P} \leqslant \mathcal{P}\vee\mathcal{R} = (\mathcal{P}\cap B) \vee \bigvee_{h=0}^{n-1} (\mathcal{P}\cap T^h A)$$

$$\left[\mathcal{P}\vee\mathcal{R} = (P\cap T^h A)_{h\in [\![0, n-1]\!],\ P\in\mathcal{P}} \cup (P\cap B)_{P\in\mathcal{P}}\right]$$

$$= (\mathcal{P}\cap B) \vee \bigvee_{h=0}^{n-1} T^h(\underbrace{T^{-h}\mathcal{P}}_{\leqslant \mathcal{P}^n} \cap A)$$

$$\leqslant \underbrace{(\mathcal{P}\cap B)}_{T(\mathcal{P}\cap B)} \vee \bigvee_{h=0}^{n-1} T^h(\mathcal{P}^n\cap A)$$

$$\leqslant \bigvee_{h=0}^{n-1} T^h \mathcal{Q}$$

Donc $\mathcal{P} \leqslant \bigvee_{h=0}^{n-1} T^h \mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{-(n-1)}$. Donc $\mathcal{Q}$ est génératrice.

• $\underline{H(Q) < h(T,P) + 2\varepsilon}$. $\quad Q = (P^n \cap A) \vee (P \cap B)$

Déjà : $H(Q) \leq H(P^n \cap A) + \underbrace{H(P \cap B)}_{< \varepsilon}$

Mq : $H(P^n \cap A) < h(T,P) + \varepsilon$

On va calculer :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} H(\underbrace{P^n \cap T^k A}_{\text{cette partition}} \mid \underbrace{\{T^k A, T^k A^c\}}_{\text{raffine celle-ci}})$$

on va dire que $S \leq \dots$, donc l'un des termes de la somme est $\leq \frac{\dots}{n}$. Sans perte de généralité, ça sera le terme pour $k=0$, qui est presque $H(P^n \cap A)$.

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} H(P^n \cap T^k A) - H(\{T^k A, T^k A^c\})$$

$$(H(P|Q) = H(P \vee Q) - HQ)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{P \in P^n \cap T^k A} -\mu(P) \log \mu(P) \quad \cancel{-\mu(T^k A^c) \log T^k A^c}$$

$$+ \mu(T^k A) \log \mu(T^k A) + \mu(T^k A^c) \cancel{\log} \mu(T^k A^c)$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{P \in P^n \cap T^k A} -\mu(P) \log \mu(P) \right] - \sum_{\substack{P \in P^n \cap B \\ P \subseteq B}} \mu(P) \log \mu(P)$$

$$+ \sum_{P \in P^n \cap B, P \subseteq B} \mu(P) \log \mu(P) + \sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^k A) \log \mu T^k A$$

$$= H(\mathcal{P}^n \vee \mathcal{R}) + \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}^n \cap B \\ P \subseteq B}} \mu(P) \log \mu(P) + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^k A) \log \mu(T^k A)}_{-H(\mathcal{R}) - \mu(B)\log\mu(B)}$$

$$= H(\mathcal{P}^n \vee \mathcal{R}) - H(\mathcal{R})$$

$$+ \underbrace{\sum_{P \in \mathcal{P}^n \cap B,\, P \subseteq B} \mu(P) \log \mu(P) - \mu(B)\log\mu(B)}_{= - H(\mathcal{P}^n \cap B) - \mu(B^c)\log\mu(B^c)}$$

$$= H(\mathcal{P}^n \vee \mathcal{R}) - H(\mathcal{R}) - \Big(\underbrace{H(\mathcal{P}^n \cap B) - H(\{B, B^c\})}_{\geq 0} \Big)$$

$$\leq H(\mathcal{P}^n \vee \mathcal{R}) - H(\mathcal{R})$$

$$= H(\mathcal{P}^n | \mathcal{R})$$

$$\leq H(\mathcal{P}^n).$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} H(\mathcal{P}^n \cap T^k A) - H(\{T^k A, T^k A^c\}) \leq H(\mathcal{P}^n)$.

on peut supposer que $H(\mathcal{P}^n \cap A \mid \{A, A^c\}) \leq \dfrac{H(\mathcal{P}^n)}{n}$

$\leq h(T, \mathcal{P}) + \varepsilon$

Mais $H(\mathcal{P}^n \cap A) \leq H(\mathcal{P}^n \cap A \mid \{A, A^c\})$ car $\{A, A^c\} \leq \mathcal{P}^n \cap A$
et $H(\mathcal{P}^n \cap A) =$
$H(\mathcal{P}^n \cap A \mid \{A, A^c\}) + H(\{A, A^c\})$

Donc $H(\mathcal{P}^n \wedge A) \leqslant \frac{H(\mathcal{P}^n)}{n} + \varepsilon \leqslant h(T,\mathcal{P}) + 2\varepsilon$.

Donc $H(\mathcal{Q}) = H((\mathcal{P}^n \wedge A) \vee (\mathcal{P} \wedge B))$
$\leqslant h(T,\mathcal{P}) + 3\varepsilon$ $\boxtimes$

Théorème 1 : Soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ ergodique, $h(T) < +\infty$. Alors T admet une partition génératrice d'entropie de Shannon finie.

Dans le thm 2, on a dit que si $\mathcal{P}$ est une partition génératrice, $H(\mathcal{P}) < +\infty$, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \mathcal{Q}$ partition tq

(i) $\mathcal{Q}$ est génératrice

(ii) $H(\mathcal{Q} \mid \tau) < h(T,\mathcal{P}) - h(T,\tau) + \varepsilon$

où $\tau = \{X\}$ est la partition triviale

En fait, on a la variante suivante du thm 2 :

Thm 2' : Soit $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ ergodique, $h(T) < +\infty$.
Soit τ une partition d'entropie finie, et $A \subseteq X$ mesurable.
Soit $\mathcal{P}$ une partition d'entropie finie qui raffine τ et $\{A, A^c\}$
Alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\mathcal{Q}$ partition, $H(\mathcal{Q}) < +\infty$ tq $\tau \leqslant \mathcal{Q}$, et

(i) $A \in \sigma\left(\bigvee_{k=-n}^{n} T^k \mathcal{Q} \mid n \in \mathbb{Z}\right)$

(ii) $H(Q \mid \tau) < h(T, P) - h(T, \tau) + \varepsilon$

Pour démontrer le thm 1, on va construire une suite de partitions $Q_0 \leq Q_1 \leq Q_2 \leq \ldots$ de la façon suivante :

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'ensembles mesurables "dense" dans l'ens. des ens. mesurables : $MAlg(X, \mu) = A /_{\mu(A \Delta B) = 0}$

Posons $Q_0 = \{X\}$. Supposons avoir défini Q_h. On utilise le théorème 2', avec $\varepsilon = 1/2^{h+1}$, $\tau = Q_h$, $P = \tau \vee \{A_{h+1}, A_{h+1}^c\}$ pour obtenir Q_{h+1} tq $Q_h \leq Q_{h+1}$ et

(i) $A_{h+1} \in \sigma\left(\bigvee_{i=-n}^{n} T^i Q_h \mid n \in \mathbb{Z}\right)$

(ii) $H(Q_{h+1} \mid Q_h) \leq h(T, Q_{h+1}) - h(T, Q_h) + \frac{1}{2^{h+1}}$.

On obtient $H(Q_h) \leq h(T, Q_h) + \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{2^i}$

$$\leq h(T) + 1.$$

Donc $\sup H(Q_h) < +\infty$

On aurait envie de poser $Q = \bigvee_{h \geq 0} Q_h$. On aurait alors $\forall h$, $A_h \in \sigma\left(\bigvee_{i=-n}^{n} T^i Q \mid n \in \mathbb{Z}\right)$. Par densité des (A_h)

on en déduirait que Q est génératrice pour T.

Lemme : Soit (Q_n) une suite croissante de partitions tq $H(Q_n) \nearrow H < +\infty$. Alors $\exists Q$ une partition tq

$$H(Q) = H \quad \text{et} \quad Q_n \leq Q \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Preuve : Thm de convergence monotone

$$f_n(x) = -\log \mu(Q_n(x))$$

$$f_n \nearrow \qquad f_n \xrightarrow{p.s.} f \quad (\text{TCVM})$$

$$H(Q_n) = \mathbb{E}[f_n] \nearrow \mathbb{E}[f] = H.$$

f est finie p.p. Si $x \in X$ est tel que $f(x) = -\log t$.

$$\forall n, \quad \mu(Q_n(x)) \geq t \qquad \mu\Big(\underbrace{\bigcap_{n\geq 0} Q_n(x)}_{:= Q(x)}\Big) = t.$$

$$f(x) = -\log \mu(Q(x)).$$