TD 4 – Topologies sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Exercice 1. Continuité d'opérations.
On travaille dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimension infinie.

1. Discuter la continuité de l'application $x \mapsto x^*$ pour les topologies normiques, fortes et faibles sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.
2. Montrer que la topologie normique raffine strictement la topologie forte et que la topologie forte raffine strictement la topologie faible.
3. Montrer qu'à x_0 fixé, les application $y \mapsto yx_0$ et $y \mapsto x_0 y$ sont continues pour la topologie forte. Est-ce le cas pour la topologie faible ?

On note $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1$ la boule unité pour la norme de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

4. Montrer que l'application $(x, y) \mapsto xy$ est continue de $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1 \times \mathcal{B}(\mathcal{H})_1$ muni de la topologie produit des topologies fortes vers $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1$ muni de la topologie forte. Est-ce le cas pour la topologie faible ?
5. Montrer que ce n'est pas le cas sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tout entier avec la topologie forte. Qu'en est-il de la topologie faible ?
6. Montrer que cette application est néammoins séquentiellement continue pour la topologie produit des topologies fortes.
7. Montrer que les topologies fortes et faibles coïncident sur l'espace des projections orthogonales et sur le groupe des unitaires $\mathcal{U}(\mathcal{H})$.
8. Montrer que la topologie forte définit une topologie de groupe sur $\mathcal{U}(\mathcal{H})$.

Exercice 2. Densité.
On continue de travailler dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimension infinie.

1. Montrer que l'ensemble des opérateurs dont l'image est de dimension finie est dense dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ pour la topologie forte, et donc pour la topologie faible.
2. Montrer que l'adhérence de $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ pour la topologie forte est l'ensemble des isométries de $\mathcal{H}$. Quelle est son adhérence pour la topologie faible ?
3. Montrer que $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1$ est séparable pour la topologie faible ssi $\mathcal{H}$ est séparable ssi $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1$ est séparable pour la topologie forte.

Exercice 3. Métrisabilité et complétude.
On travaille maintenant dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ séparable de dimension infinie.

1. Montrer que les topologies fortes et faibles sont métrisables en restriction à $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1$.
2. Montrer que ce n'est pas le cas pour les topologies fortes et faibles sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tout entier.
3. Montrer que la topologie forte sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1$ est en fait complètement métrisable. Qu'en est-il de la topologie faible ?
4. Montrer que $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ est complètement métrisable.
5. Montrer que les unitaires dont le spectre est $\mathbb{S}_1$ forment un G_δ [1] dense de $\mathcal{U}(\mathcal{H})$. (plus difficile) Qu'en est-il de la mesure spectrale et de la multiplicité ?

1. On dit qu'un sous-ensemble d'un espace topologique est un G_δ si on peut l'écrire comme intersection dénombrable d'ouverts.

Exercice 4. Formes linéaires continues sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.
Soit φ une forme linéaire continue sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

(1) Il existe $\xi_1, ..., \xi_n, \eta_1, ..., \eta_n \in \mathcal{H}$ tels que $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x\xi_i, \eta_i \rangle$.

(2) φ est faiblement continue.

(3) φ est fortement continue.

Exercice 5. Topologie ultrafaible.
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. On note $\ell^2(\mathcal{H})$ l'ensemble des suites (ξ_i) telles que $\sum_i \|\xi_i\|^2 < +\infty$, muni du produit scalaire

$$\langle (\xi_i), (\eta_i) \rangle = \sum_i \langle \xi_i, \eta_i \rangle \, .$$

On a un plongement de C^*-algèbre $\iota : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{H}))$ donné par $\iota(x)(\xi_i)_i = (x\xi_i)_i$. On appelle topologie ultrafaible la topologie faible induite par $\mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{H}))$ sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ via ι.

1. Vérifier que $\ell^2(\mathcal{H})$ est un espace de Hilbert.
2. Montrer que la topologie faible et ultrafaible coïncident sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})_1$.
3. Montrer que la topologie ultrafaible coïncide avec la topologie faible-$*$ provenant de la dualité vue au TD précédent identifiant $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})^*$ à $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.