TD 1 – Algèbres de Banach, transformée de Gelfand, spectre

Exercice 1. Tranformée de Gelfand sur $\ell^1(\Gamma)$.

(1) Montrer que $\ell^1(\Gamma)$ muni du produit de convolution est une algèbre de Banach unifère. Montrer que $\ell^1(\Gamma)$ est commutative si et seulement Γ est abélien.

On suppose désormais que Γ est abélien. Soit $\widehat{\Gamma}$ l'ensemble des morphismes de groupes de Γ dans $\mathbb{S}^1$. On munit $\widehat{\Gamma}$ de la topologie de la convergence simple et de la structure de groupe évidente.

(2) Montrer que $\widehat{\Gamma}$ est un groupe compact abélien.

(3) Montrer que $\mathrm{Sp}(\ell^1(\Gamma)) = \widehat{\Gamma}$. Quelle est la transformée de Gelfand quand $\Gamma = \mathbb{Z}$? Est-elle isométrique ?

Exercice 2. Exemple fondamental de C^*-algèbre.
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe. Montrer que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ muni de la norme usuelle et de l'involution $T \mapsto T^*$ est une C^*-algèbre.

Exercice 3. Opérateur de décalage unilatéral.
Soit $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$, on définit l'opérateur de décalage D par

$$D(f) : n \mapsto \begin{cases} f(n-1) & \text{si } n \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } n = 0, \end{cases}$$

pour tout $f \in \ell^2(\mathbb{N})$.

(1) Déterminer l'adjoint de D.

(2) L'opérateur D est-il normal ?

(3) Déterminer le spectre de D et de D^* (dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$).

Exercice 4. Opérateur de décalage bilatéral.
Soit $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$, on définit l'opérateur de décalage D par $D(f) : n \mapsto f(n-1)$ pour tout $f \in \ell^2(\mathbb{Z})$.

(1) Déterminer l'adjoint de D.

(2) L'opérateur D est-il normal ?

(3) Déterminer le spectre de D et de D^*.

Exercice 5. Le spectre en fonction de l'algèbre.
Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Soit $A = C(\partial\mathbb{D})$ et $B \subset A$ la fermeture uniforme des polynômes dans $C(\partial\mathbb{D})$. Montrer que $\mathrm{Sp}_A(z) = \partial\mathbb{D}$ et $\mathrm{Sp}_B(z) = \overline{\mathbb{D}}$.

Exercice 6. Gelfand-Mazur réel.
Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre de Banach.

1. Soit $x \in A$, montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(x + a1)^2 + b^2 1$ est non inversible.

On suppose désormais que tout élément non nul de A est inversible

2. Montrer que si l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto t1 \in A$ n'est pas surjective, alors il existe un élément $i \in A$ tel que $i^2 = -1$.
3. On fixe $i \in A$ tel que $i^2 = -1$. Montrer que si $x \in A$ commute à i, alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $x = a1 + bi$.
4. Posons $C = \{x \in A : ix = xi\}$ et $D = \{x \in A : ix = -xi\}$. Montrer que $A = C \oplus D$, et que pour tout $y \in D$ non nul on a $D = yC$.

5. En déduire que si A est une $\mathbb{R}$-algèbre de Banach où tout élément non nul est inversible, alors A est isomorphe (en tant qu'algèbre de Banach) à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou au corps (non commutatif) des quaternions $\mathbb{H}$.

Exercice 7. Spectre et caractères.
Dans cet exercice, A est une algèbre de Banach commutative unifère. Un **caractère** de A est un morphisme d'algèbre unifère continu $\chi : A \to \mathbb{C}$. Un **idéal** I de A est un sous-ensemble strict $I \subset A$ tel que $AI = IA = I$.

1. Montrer qu'un idéal ne peut pas contenir d'élément inversible.
2. Montrer que tout idéal est contenu dans un idéal maximal (pour l'inclusion).
3. Montrer que si I est un idéal maximal, alors I est fermé.
4. Montrer que si I est un idéal fermé, alors le quotient A/I est une algèbre de Banach pour la norme quotient.
5. En déduire que pour tout $x \in A$, on a
$$\mathrm{Sp}_A(x) = \{\chi(x) \colon \chi \text{ caractère de } A\}$$

Exercice 8. Algèbre unifère et norme de 1.
Soit A une algèbre unifère qui soit un espace de Banach pour une norme $\|\cdot\|$ et telle que $\|xy\| \leqslant \|x\| \, \|y\|$ pour tous $x, y \in A$. Montrer qu'il existe une autre norme $\|\cdot\|'$ équivalente à $\|\cdot\|$ telle que $\|1\|' = 1$, c'est-à-dire telle que A munie de $\|\cdot\|'$ soit une algèbre de Banach. On pourra utiliser l'algèbre de Banach $\mathcal{L}(A)$ des applications linéaires continues de l'espace de Banach A dans lui même.

Exercice 9. Une application de l'exercice 7.

1. Soient A, une algèbre de Banach unifère, et a et b deux éléments de A, qui commutent. Montrer que $\mathrm{Sp}_A\, a + b \subset \mathrm{Sp}_A\, a + \mathrm{Sp}_A\, b$ et $\mathrm{Sp}_A\, ab \subset (\mathrm{Sp}_A\, a)(\mathrm{Sp}_A\, b)$.
2. Soient a et b deux éléments d'une algèbre de Banach A tels que $\mathrm{Sp}_A\, a \cap \mathrm{Sp}_A\, b = \emptyset$. Montrer que l'application $\varphi_{a,b} : x \mapsto ax - xb$ est inversible dans l'algèbre de Banach $\mathcal{L}(A)$.

Exercice 10. Retour sur $\ell^1(\mathbb{Z})$.
Montrer le théorème de Wiener : si une fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ est de coefficients de Fourier sommables et ne s'annule pas, alors $\frac{1}{f}$ est également de coefficients de Fourier sommables. On pourra utiliser l'exercice 1 [1].

1. Il s'agit de l'application principale de la théorie de Gelfand dans le papier où il la développe.