TD 5 – Non-déterminisme et classe NP

Exercice 1. . Un autre point de départ NP-complet

1. Expliquer le fonctionnement d'une machine de Turing non déterministe fonctionnant en temps polynomial qui reconnaisse $L_1 = \{(\langle M\rangle, t) : t \leqslant |Q|$ et M admet un calcul acceptant sur le mot vide en temps $\leqslant t\}$.
2. Montrer que L_1 est NP-complet. On pourra commencer, étant donnée une machine de Turing non déterministe M fonctionnant en temps polynomial $p(n)$ et un mot x, construire une machine de Turing M_x avec un nombre d'états $\geqslant 2\,|x| + p(|x|)$ qui admet un calcul acceptant sur le mot vide en temps $2\,|x| + p(|x|)$ ssi M admet un calcul acceptant sur x en temps $\leqslant p(|x|)$.
3. On considère un modèle de machine de Turing non déterministe avec un seul ruban en lecture-écriture. Montrer que si M est non déterministe au sens du cours, on peut trouver une machine M' avec un seul ruban qui reconnait le même langage que M et qui fonctionne en temps $\leqslant K(1 + t^2)$ où t est le temps de calcul de M et K est une constante.
4. En déduire que le langage $L_1' = \{(\langle M\rangle, t) : t \leqslant |Q|$, M a un seul ruban et M admet un calcul acceptant sur le mot vide en temps $\leqslant t\}$ est NP-complet.
5. On considère maintenant le problème du pavage fini du plan PFP suivant :
   — **Donnée** : Un ensemble fini C de couleurs, dont une couleur *blanche*, un ensemble fini T de tuiles carrées 1×1 dont les bords sont colorés par des éléments de C, un entier $n \leqslant |C|$.
   — **Question** : Peut-on trouver un coloriage du carré $n \times n$ par des tuiles dont les côtés adjacents sont de la même couleur, avec toutes les couleurs extérieures blanches ?
   Montrer que PFP$\in$NP.
6. Montrer que PFP est NP-complet en y réduisant polynomialement le langage L_1'. On pourra construire un pavage réprésentant l'évolution d'une machine de Turing non déterministe sur un calcul terminant.
7. En déduire que SAT est NP-complet.

Exercice 2. Montrer que NP $\subsetneq$ NEXP.

Exercice 3. Montrer que la classe E n'est pas close pour $\leqslant_m^p$.

Exercice 4. Montrer que le problème $A = \{(\langle M\rangle, x, t) \mid M(x)$ accepte en temps $t\}$, où M est une machine non-déterministe, x est un mot et t un entier en binaire, est NEXP-complet.

Exercice 5. Si P= NP, montrer que le problème de calculer une affectation de valeurs satisfaisant une formule propositionnelle peut être résolu en temps polynomial.

Exercice 6. On rappelle que INDSET est l'ensemble des couples (G, k) avec G graphe non dirigé et $k \in \mathbb{N}$ tel que G possède un sous-ensemble indépendant de taille k (c'est-à-dire un ensemble de k sommets jamais connectés deux à deux). On définit HALF-INDSET l'ensemble des graphes $G = (V, E)$ non dirigés possédant un sous-ensemble indépendant de taille $\lceil |V|/2 \rceil$.

1. Montrer que HALF-INDSET $\in$ NP.
2. Montrer que INDSET $\leqslant_m^p$ HALF-INDSET.
3. En déduire que le problème HALF-INDSET est NP-complet.

Exercice 7. Colorabilité.

1. Montrer que le problème de k-COLORABILITÉ se réduit polynomialement au problème de $(k+1)$-COLORABILITÉ.
2. Dans quelle classe de complexité est le problème 2-COLORABILITÉ ?
3. Montrer que le problème 3-COLORABILITÉ est NP-complet.

Exercice 8. Cycles.

1. Montrer que le problème EC (l'ensemble des graphes ayant un cycle eulérien) est dans P.
2. Montrer que les problèmes UHC (graphes ayant un cycle hamiltonien) et UHP (graphes ayant un chemin hamiltonien) sont polynomialement équivalents.
3. Montrer que les problèmes DHC (graphes orientés ayant un cycle hamiltonien) et DHP (graphes orientés ayant un chemin hamiltonien) sont polynomialement équivalents.
4. Montrer que les problèmes DHC (graphes orientés ayant un cycle hamiltonien) et UHC (graphes ayant un cycle hamiltonien) sont polynomialement équivalents.
5. Sachant que DHP est NP-complet. En déduire que UHC, DHP, DHC sont également NP-complets.

Exercice 9. Satisfaisabilité d'un circuit booléen.
Un circuit booléen est un graphe $C = (V, E)$ où les sommets dans $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ sont appelés les portes du circuit. Ce graphe est orienté, sans cycle, et on peut donc supposer que les arêtes sont de la forme (i, j) avec $i < j$. Chaque sommet du graphe a un degré entrant égal à 0, 1 ou 2 et est étiqueté par l'un des éléments de $\{0, 1, \neg, \wedge, \vee\} \cup \{x_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$. Les sommets étiquetés par $0, 1$ ou une variable sont de degré entrant 0, ceux étiquetés par $\neg$ de degré entrant 1, et ceux étiquetés par $\wedge$ ou $\vee$ de degré entrant 2. Le sommet numéroté n n'a pas d'arêtes sortantes. Il est facile de définir la valeur d'un circuit booléen pour une affectation des variables. On peut alors considérer le problème CIRCUIT-SAT : étant donné un circuit booléen, existe-t-il une affectation lui donnant la valeur "vrai" ? Montrer que le problème CIRCUIT-SAT est polynomialement équivalent au problème SAT.

Exercice 10. Couverture d'un graphe par des sommets.
Soit $G = (V, E)$ un graphe et S un sous-ensemble de V. On dit que S est une couverture de sommets de G si, pour toute arête (u, v) de E, au moins une des ses extrémités (u et v) appartient à S. On appelle VERTEXCOVER l'ensemble des couples (G, k) tels que G est un graphe ayant une couverture de sommets de taille au plus k.

1. Si $G = (V, E)$ est un graphe et S une couverture de sommets de G, que pouvez-vous dire de l'ensemble de sommets $V \setminus S$ dans G ?
2. Montrer que VERTEXCOVER est NP-complet.
3. On appelle VERTEXCOVEREVEN l'ensemble des (codages de) couples (G, k) tels que G est un graphe dont tous les sommets sont de degré pair et ayant une couverture de sommets de taille inférieure ou égale à k. Montrer que VERTEXCOVEREVEN est NP-complet.

Exercice 11. Ensemble de sommets dominant un graphe.
On dit qu'un sous-ensemble D des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est dominant si tout sommet de G est soit dans D soit relié à un sommet de D par une arête. Le problème DOM est l'ensemble des couples (G, k) où G est un graphe possédant un sous-ensemble dominant de taille au plus k.

1. Soit $G = (V, E)$ un graphe. On construit un graphe $G' = (V', E')$ de la façon suivante : V' est l'ensemble V, moins les sommets isolés (n'appartenant à aucune arête), et auquel on ajoute des nouveaux sommets u_e pour chaque arête $e \in E$; $E' = E \cup \{(x, u_e) \mid x \text{ est une extrémité de } e\}$. Montrer que G a une couverture de sommets de taille au plus k ssi G' a un ensemble dominant de taille au plus k.
2. En déduire que Dom est NP-complet.

Exercice 12. Soit $G = (V, E)$ un graphe et S un sous-ensemble de V. On dit que S est une couverture de sommets de G si, pour toute arête (u, v) de E, au moins une des ses extrémités (u et v) appartient à S. On appelle VertexCover l'ensemble des couples (G, k) tels que G est un graphe ayant une couverture de sommets de taille inférieure ou égale à k. Un exercice de TD a montré que le problème VertexCover est NP-complet. On considère maintenant le problème Cover : sur la donnée d'un ensemble E ainsi que de parties $P_1, \ldots, P_m$ de E, et d'un entier k, déterminer s'il existe un sous-ensemble J de $\{1, \ldots, m\}$ tel que $|J| = k$ et l'union des P_i soit égale à E. Montrer que Cover est NP-complet.

Exercice 13. Le problème SubsetSum.
Soit 3-Cover le problème suivant : sur la donnée d'un ensemble E ainsi que de parties $P_1, \ldots, P_k$ de E à 3 éléments chacune, déterminer s'il existe un sous-ensemble I de $\{1, \ldots, k\}$ tel que pour les indices dans I les P_i soient 2-à-2 disjoints et l'union des P_i soit égale à E.
Soit SubsetSum le problème suivant : sur la donnée d'entiers $a_1, \ldots, a_k, b$, déterminer s'il existe un sous-ensemble J de $\{1, \ldots, n\}$ tel que $\sum_{j \in J} a_j = b$. Sachant que 3-Cover est NP-complet, montrer que SubsetSum est NP-complet.

Exercice 14. Le voyageur de commerce.
On considère un graphe non-orienté complet (donc qui contient une arête entre toute paire de sommets distincts i et j) avec une matrice de distances D à coefficients entiers naturels : $D_{i,j}$ est la distance pour aller du sommet i au sommet j. On appelle TSP l'ensemble des (codages de) couples (D, k) tels qu'il existe un circuit passant exactement une fois par chaque sommet et tels que la distance totale parcourue (obtenue en additionnant les distances des arêtes empruntées) soit inférieure ou égale à k. Montrer que TSP est NP-complet.

Exercice 15. Systèmes d'équations booléennes.

1. Montrer que déterminer si un système linéaire booléen (c'est-à-dire sur le corps à deux éléments) a une solution est dans P.
2. Que peut-on dire de la complexité de ce même problème pour des équations polynomiales ?

Exercice 16. On rappelle que la classe coNP est la classe des langages L dont le complémentaire $\bar{L}$ appartient à NP.

1. Montrer que $L \in \mathsf{coNP}$ ssi il existe un langage $L' \in P$ et un polynôme p tels que, pour tout $x \in \{0, 1\}^*$, $x \in L$ ssi $\forall y \in \{0, 1\}^{p(|x|)} (x, y) \in L'$.
2. Montrer que $P \subseteq \mathsf{NP} \cap \mathsf{coNP}$.
3. Soit L_1, L_2 deux langages de $\mathsf{NP} \cap \mathsf{coNP}$. Montrer que leur différence symétrique (l'ensemble des x tels que x appartient à exactement l'un de L_1 ou L_2) est aussi dans $\mathsf{NP} \cap \mathsf{coNP}$.

Exercice 17. Union et intersection de problèmes NP-complets.

1. Soit Ind-or-Clique l'ensemble des couples (G, k) tels que G soit un graphe ayant soit

un ensemble indépendant de taille au moins k, soit une clique de taille au moins k. Montrer que Ind-or-Clique est NP-complet.

2. En général, la classe des langages NP-complets est-elle close par union et intersection ?