TD 3 – Théorème s-m-n, théorèmes de Rice et de point fixe

Exercice 1. Montrer qu'il existe une fonction récursive primitive f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ soit un indice de la fonction $x \mapsto \lfloor \sqrt[n]{x} \rfloor$.

Exercice 2.

1. Montrer qu'il existe une fonction récursive primitive c telle que, pour tout i, si φ_i^1 est la fonction caractéristique d'un ensemble A, alors $\varphi_{c(i)}^1$ est la fonction caractéristique de $\bar{A}$.
2. Montrer qu'il existe une fonction récursive primitive a telle que, pour tous i et j, l'ensemble de définition de $\varphi_{a(i,j)}^1$ est l'intersection des ensembles de définition de φ_i^1 et de φ_j^1.
3. Montrer qu'il existe une fonction récursive primitive b telle que, pour tous i et j, l'ensemble de définition de $\varphi_{b(i,j)}^1$ est l'union des ensembles de définition de φ_i^1 et de φ_j^1.

Exercice 3.

1. Soit
$$A = \{i \in \mathbb{N} \mid \text{dom}\,(\varphi_i^1) \cap (3\mathbb{N}) \neq \emptyset\}.$$
L'ensemble A est-il récursif ?
2. Montrer que A est récursivement énumérable.
3. L'ensemble $\mathbb{N} \setminus A$ est-il récursivement énumérable ?

Exercice 4.

1. Montrer qu'il existe une fonction récursive primitive f telle que pour tout $x, n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{f(n)}^1(x) = nx$.
2. En déduire qu'il existe un entier n tel que φ_n^1 est la fonction $x \mapsto nx$.

Exercice 5.

1. Soit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x^1 \text{ n'est pas injective}\}$. Montrer que A n'est pas récursif.
2. Montrer que A est récursivement énumérable.
3. Que pouvez-vous dire de $\bar{A}$?

Exercice 6. Montrer qu'il existe une fonction récursive primitive $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout n, l'ensemble de définition de $\varphi_{\alpha(n)}^1$ est $\{1, n, n^2, n^3, \dots\}$.

Exercice 7.

1. Soit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{le domaine de } \varphi_x^1 \text{ est un ensemble récursif}\}$. Montrer que A n'est pas récursif.
2. A est-il récursivement énumérable ?
3. Soit $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{le domaine de } \varphi_x^1 \text{ est un ensemble récursivement énumérable}\}$. Que peut-on dire de B ?

Exercice 8.

1. Montrer que $A = \{i \in \mathbb{N} \mid \text{Im}\,\varphi_i^1 = \{0\} \text{ ou } \text{Im}\,\varphi_i^1 = \emptyset\}$ n'est pas récursif.
2. A est-il récursivement énumérable ? Même question pour $\bar{A}$.
3. Montrer que $B_0 = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x^1(x) = 0\}$ n'est pas récursif.
4. Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer que $B_k = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x^1(x) = k\}$ n'est pas récursif.
5. Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer que $C_k = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid \varphi_x^2(y) = k\}$ n'est pas récursif.

Exercice 9. Soit g, k dans $\mathcal{F}_1^*$ et h dans $\mathcal{F}_4^*$ des fonctions.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction f telle que pour tous x, y :
$$\begin{aligned} f(x, 0) &= g(x) \\ f(x, 1) &= k(x) \\ f(x, y+2) &= h(x, y, f(x, y+1), f(x, y)) \end{aligned}$$

2. Montrer que si g, k et h sont récursives, alors f est récursive :
   a) en utilisant un codage,
   b) en utilisant un théorème de point fixe.

Exercice 10. Soit f une fonction récursive à une variable. Montrer qu'il existe une fonction récursive primitive α telle que, pour tout i, l'ensemble de définition de $\varphi^1_{\alpha(i)}$ soit égal à l'image réciproque par f de l'ensemble de définition de φ^1_i.

Exercice 11.

1. Montrer que la propriété pour une fonction récursive (partielle) d'être de domaine fini n'est pas décidable.

2. Pour la question précédente, l'ensemble des indices correspondant est-il récursivement énumérable ? Et son complémentaire ?

Exercice 12. Montrer que l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid \varphi^1_i$ est soit récursive primitive, soit non totale$\}$ n'est pas récursif.

Exercice 13. Soit $A = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi^1_i \text{ est totale}\}$ et $A_0 = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi^1_i \text{ est définie en } 0\}$.

1. Montrer que A n'est pas récursivement énumérable. (Supposer que A est récursivement énumérable. C'est donc l'image d'une fonction récursive totale f. Considérer alors la fonction $g : x \mapsto \varphi^1_{f(x)}(x) + 1$.)
2. Montrer que A_0 est récursivement énumérable.
3. Montrer que $\bar{A}_0$ n'est pas récursivement énumérable.
4. Trouver une fonction récursive totale α telle que $i \in A_0$ ssi $\alpha(i) \in A$.
5. En déduire que $\bar{A}$ n'est pas récursivement énumérable.

Exercice 14. Soit A l'ensemble des entiers n tels que le domaine de définition de φ^1_n est inclus dans l'ensemble des entiers pairs.

1. Montrer que A n'est pas récursif.
2. Est-ce que A est récursivement énumérable ? Est-ce que le complémentaire de A l'est ?
3. Mêmes questions pour l'ensemble A' des entiers n tels que le domaine de définition de φ^1_n soit égal à l'ensemble des entiers pairs.

Exercice 15. Soit $A = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi^1_i \text{ est totale}\}$ et $B = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi^1_i \text{ est de domaine de définition infini}\}$.

1. Trouver une fonction récursive totale β telle que :
   a) si φ^1_i est totale, alors $\varphi^1_{\beta(i)}$ est totale.
   b) si φ^1_i n'est pas totale, alors $\varphi^1_{\beta(i)}$ est de domaine fini.
2. En déduire que B n'est pas récursivement énumérable, et que son complémentaire ne l'est pas non plus.

Exercice 16. Montrer que les ensembles suivants ne sont pas récursifs :

1. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi^1_x \text{ est totale et constante}\}$.
2. $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi^1_x(x) = 0\}$.
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid \varphi_x(y) = 0\}$.

Exercice 17. Soit α et g dans $\mathcal{F}^*_1$ et h dans $\mathcal{F}^*_3$ des fonctions récursives. Montrer qu'il existe une unique fonction f telle que pour tous x, y :

$$f(x, 0) = g(x)$$
$$f(x, y+1) = h(x, y, f(\alpha(x), y))$$

Montrer aussi que f est récursive.