TD 2 – Fonctions récursives

Exercice 1. Soit r la fonction définie par $r(x) = \mu z.(z^2 = x)$ et s la fonction définie par le schéma de récurrence suivant :

$$\begin{cases} s(0) = r(0) \\ s(n+1) = s(n) + r(n+1) \end{cases}$$

Que vaut la fonction s ?

Exercice 2.

1. Décrire une machine de Turing calculant la fonction $n \mapsto 2n$.
2. Décrire une machine de Turing calculant la fonction $n \mapsto \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
3. Décrire une machine de Turing qui teste la relation de divisibilité.

Exercice 3. Soit f une fonction totale de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que f est une fonction récursive si et seulement si son graphe est récursif.

Exercice 4. Est-il vrai qu'une fonction totale est récursive primitive si et seulement si son graphe est récursif primitif ?

Exercice 5.

1. Montrer que la fonction g définie par $g(n) = 1$ s'il existe une suite de n chiffres 7 consécutifs dans le développement de $\sqrt{2}$, $g(n) = \perp$ sinon est récursive.
2. La fonction h définie par $h(n) = 1$ si $g(n) = 1$ et $h(n) = 0$ sinon est-elle aussi récursive ?

Exercice 6.

1. Montrer que l'image d'une fonction à une variable totale récursive et croissante est un ensemble récursif.
2. Réciproquement, montrer que tout ensemble récursif infini est l'image d'une fonction récursive strictement croissante.

Exercice 7. Soit f une fonction récursive totale de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ dont l'image est infinie. Montrer qu'il existe une fonction g, récursive totale, injective et ayant même image que f.

Exercice 8. Soit f une fonction récursive. Soit $g(x)$ le plus petit $z \leqslant x$ tel que $f(z)$ diverge s'il existe un tel z, et $g(x)$ non définie sinon. La fonction g est-elle récursive ?

Exercice 9. Montrer que si f est une application de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ calculable par une machine de Turing dont le temps de calcul est une fonction récursive primitive de l'entrée $(x_1, \ldots, x_p)$, alors f est récursive primitive.

Exercice 10. Le schéma de minimisation totale est le schéma obtenu en appliquant le schéma de minimisation seulement dans le cas où il permet d'obtenir une fonction totale. Soit $\mathcal{E}$ le plus petit ensemble de fonctions contenant les fonctions récursives primitives et clos par composition et minimisation totale. Montrer que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des fonctions récursives totales.

Exercice 11. Dans cet exercice, nous considérons des machines de Turing avec les propriétés suivantes :

— Les machines ont deux rubans semi-infinis ;

— L'alphabet est $\{0, 1, \#\}$. Le symbole 0 est le symbole blanc et # est le symbole de début de bande (il n'apparaît que là).

On considère la fonction $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par : $\alpha(n)$ est le maximum, sur toutes les machines de Turing comme ci-dessus à $n+1$ états, du nombre de 1 écrits au début de la seconde bande (avant le premier 0) à la fin du calcul, quand on lance cette machine sur l'entrée vide.

1. Montrer que α est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire que pour tout n, il existe au moins une machine à $n+1$ états qui s'arrête sur l'entrée vide).
2. Montrer que α est strictement croissante.
3. On veut montrer que α n'est pas récursive. Dans la suite, on suppose par l'absurde qu'elle l'est. Montrer que, sous cette hypothèse, la fonction $\beta : n \mapsto \alpha(2n)$ est récursive totale.
4. Montrer qu'il exite une constante c telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une machine à $n+c$ états qui, sur l'entrée vide, écrit $\underbrace{111\dots1}_{\beta(n)}$ sur le second ruban.
5. Conclure par l'absurde que α n'est pas récursive.

Exercice 12. Pour deux sous-ensembles A et B de $\mathbb{N}$, on dit que A se réduit à B (ce qu'on note $A \leqslant B$) si il existe une fonction récursive totale f telle que pour tout $x \in \mathbb{N}$, $x \in A$ ssi $f(x) \in B$.

1. Montrer que si B est récursif et $A \leqslant B$, alors A est récursif.
2. Montrer que si B est récursivement énumérable et $A \leqslant B$, alors A est récursivement énumérable.

Exercice 13. Soit A un ensemble récursivement énumérable. On pose

$$B = \bigcup_{a \in A} \mathrm{dom}(\varphi^1_a).$$

1. Montrer que $\{(a, x) \in \mathbb{N}^2 \mid a \in A \text{ et } \varphi^1_a(x) \text{ converge}\}$ est récursivement énumérable.
2. En déduire que B est récursivement énumérable.

Exercice 14. Montrer que tout ensemble infini récursivement énumérable contient un sous-ensemble récursif infini.

Exercice 15. Montrer que, si $A, B \subseteq \mathbb{N}$ sont deux ensembles récursivement énumérables tels que $A \cup B = \mathbb{N}$, alors il existe un ensemble récursif $R \subseteq \mathbb{N}$ tel que $R \subseteq A$ et $\mathbb{N} \setminus R \subseteq B$.

Exercice 16. Soit φ^1 la fonction récursive partielle à 2 variables permettant d'énumérer les fonctions récursives partielles à 1 variable. Montrer qu'il n'existe pas de fonction récursive totale f prolongeant la fonction g définie par $g(x) = \varphi^1(x, x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{N}$.

Exercice 17.

1. Montrer que tout sous-ensemble récursivement énumérable infini de $\mathbb{N}$ est l'image d'une fonction récursive totale injective.
2. Peut-on demander en plus que cette fonction soit récursive primitive ?

Exercice 18. On rappelle que B^1 est l'ensemble des triplets (i, t, x) tels que la machine d'indice i fonctionnant sur l'entrée x s'arrête au temps t. On considère la fonction $t : x \mapsto \mu y \ ((x, y, x) \in B^1)$.

1. Montrer que la fonction t est récursive et qu'elle n'est pas totale.
2. Montrer que t ne peut pas être prolongée en une fonction récursive totale : il n'existe pas de fonction récursive totale f telle que t et f soient égales sur le domaine de définition de t.

Exercice 19. Si $A, B \subseteq \mathbb{N}$ sont deux ensembles tels que $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont récursivement séparables s'il existe un ensemble récursif $R \subseteq \mathbb{N}$ tel que $A \subseteq R$ et $B \subseteq \bar{R}$.

1. Donner un exemple deux ensembles A et B récursivement séparables.
2. Soit A et B deux ensembles tels que $A \cap B = \emptyset$. On suppose que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont récursivement énumérables. Montrer que A et B sont récursivement séparables.
3. Montrer qu'il existe deux ensembles récursivement inséparables.
4. On souhaite montrer qu'il existe deux ensembles récursivement énumérables mais inséparables. Considérer $A = \{i \in \mathbb{N} | \ \varphi_i^1(i) = 0\}$ et $B = \{i \in \mathbb{N} | \ \varphi_i^1(i) = 1\}$ et supposer que A et B sont récursivement séparables par un ensemble récursif R. Considérer un indice r de la fonction caractéristique de R pour arriver à une contradiction.

Exercice 20. Dans les cas suivants, donner un exemple d'ensemble A ou montrer qu'il n'en existe pas ($\bar{A}$ désigne le complémentaire de A) :

1. A est récursif et $\bar{A}$ est récursif.
2. A est récursif et $\bar{A}$ n'est pas récursif.
3. A est récursif et $\bar{A}$ est récursivement énumérable.
4. A est récursif et $\bar{A}$ n'est pas récursivement énumérable.
5. A est récursivement énumérable et $\bar{A}$ n'est pas récursif.
6. A est récursivement énumérable et $\bar{A}$ est récursivement énumérable.
7. A est récursivement énumérable et $\bar{A}$ n'est pas récursivement énumérable.
8. A n'est pas récursivement énumérable et $\bar{A}$ n'est pas récursivement énumérable.

Exercice 21. Exhiber un ensemble récursif $A \subseteq \mathbb{N}^2$ tel que l'ensemble $A' = \{x \mid \forall y \in \mathbb{N}, (x, y) \in A\}$ ne soit pas récursivement énumérable.

Exercice 22. Montrer que le problème de déterminer sur l'entrée (x, y) si x appartient à l'image de φ_y^1 est indécidable.

Exercice 23. Soit α une fonction récursive totale injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Soit A l'image de α. On pose :

$$B = \{x \mid \text{il existe } y > x \text{ tel que } \alpha(y) < \alpha(x)\}.$$

1. Montrer que B est récursivement énumérable et que son complémentaire est infini.
2. On suppose que le complémentaire de B contient un ensemble récursivement énumérable infini C. Montrer que A est récursif.

Exercice 24. Montrer qu'il existe $A \subset \mathbb{N}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

— le complémentaire de A est infini ;
— A intersecte tout ensemble récursivement énumérable infini.