TD 1 – Fonctions récursives primitives

Exercice 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $\{n\}$ est récursif primitif. En déduire que tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ qui est fini ou qui est le complémentaire d'un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ est récursif primitif.

Exercice 2. Montrer que l'ensemble des nombres pairs est récursif primitif.

Exercice 3. Soit p un entier non nul. Montrer que la fonction $\sup_p : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$ qui à $(x_1, \dots, x_p)$ associe le maximum de $x_1, \dots, x_p$ est récursive primitive.

Exercice 4. Montrer que les fonctions *quotient* et *reste* sont récursives primitives (par définition, on pose $x/y = 0$ si $y = 0$). En déduire que $\{(x, y) \mid y \text{ divise } x\}$ est récursif primitif.

Exercice 5. Montrer que l'ensemble des nombre premiers est récursif primitif. En déduire que la fonction π qui à n fait correspondre le $(n + 1)$-ième nombre premier est récursive primitive.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction récursive primitive. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{x+1 \text{ fois}}(0)$ est récursive primitive.

Exercice 7. Montrer que la fonction $x \mapsto x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}}$, où le nombre de x dans la tour d'exponentielles est $x + 1$, est récursive primitive.

Exercice 8. Soit E l'ensemble des entiers naturels qui sont la somme de deux carrés. Montrer que E est récursif primitif.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(a, b) = \alpha_2(c, d)$ où c/d est l'écriture simplifiée de la fraction a/b si $b \neq 0$, et $c = d = 0$ sinon. Montrer que la fonction f est récursive primitive.

Exercice 10. Soit u la fonction qui à $n \in \mathbb{N}$ associe le $(n + 1)$-ième entier naturel (dans l'ordre croissant) qui est une somme de deux carrés. Montrer que u est récursive primitive.

Exercice 11. Soit f la fonction qui à n associe le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à n. Montrer que f est récursive primitive.

Exercice 12. Montrer que les fonctions calculant le plus petit commun multiple et le plus grand diviseur commun de deux nombres sont récursives primitives.

Exercice 13. Soit n entier, on lui associe la suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de l'écriture décimale de $\sqrt{n}$: $\sqrt{n} = a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots$, où a_0 est un entier et chaque a_i pour $i \geqslant 1$ est un chiffre de 0 à 9 (si $\sqrt{n}$ est un entier, a_i vaut 0 pour $i \geqslant 1$). Montrer que la fonction f qui à (n, i) associe a_i (dans la suite associée à $\sqrt{n}$) est récursive primitive.

Exercice 14. Soit A l'ensemble des nombres entiers dont l'écriture en base 10 est un palindrome (par exemple 13266231 ou 754434457). Montrer que A est récursif primitif.

Exercice 15. Soit g une fonction récursive primitive. Soit f la fonction définie par : $f(0, x) = g(x)$ et $f(n + 1, x) = f(n, f(n, x))$. Montrer que f est récursive primitive.

Exercice 16. Montrer qu'une fonction f est primitive récursive ssi le graphe de f est primitif récursif et f est majorée par une fonction primitive récursive.

Exercice 17. Soit $\mathcal{S}^*$ l'ensemble des suites finies d'entiers non vides et $\alpha : \mathcal{S}^* \Rightarrow \mathbb{N}$ la fonction qui à une suite non vide $(x_1, \dots, x_p)$ associe $\alpha(x_1, \dots, x_p) = \alpha_2(p, \alpha_p(x_1, \dots, x_p))$.

1. Montrer que α est une injection dont l'image est un ensemble récursif primitif.
2. Montrer que la fonction $\phi : \mathbb{N}^3 \Rightarrow \mathbb{N}$ définie par :

$$\phi(i, p, x) = \begin{cases} \beta_p^i(x) & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est récursive primitive.

3. En déduire qu'il existe une fonction récursive primitive $\gamma \in \mathcal{F}_2$ qui sur la donnée de deux entiers z et i renvoie le i-ième élément de la suite finie d'entiers codée par z via α.

Exercice 18. On rappelle que π est la fonction qui à n associe le $(n+1)$-ième nombre premier. Soit $\Omega' : \mathcal{S}^* \Rightarrow \mathbb{N}$ la fonction qui à une suite non vide d'entiers $(x_0, \ldots, x_n)$ associe $\Omega'(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{i=0}^n \pi(i)^{1+x_i}$.

1. Montrer que Ω' est une injection dont l'image est un ensemble récursif primitif.
2. Montrer que l'on peut définir une fonction récursive primitive $\delta' : \mathbb{N}^2 \Rightarrow \mathbb{N}$ telle que, si z est de la forme $\Omega'(x_0, \ldots, x_n)$ et si $0 \leqslant i \leqslant n$, alors $\delta'(z, i)$ est égal à x_i.

Exercice 19.

1. Rappeler la définition d'un codage des suites finies vu en cours (α, Ω ou Ω').
2. Donner une définition récursive primitive de la fonction qui à un entier n associe le code de la suite de diviseurs premiers de n dans l'ordre croissant.

Exercice 20. On rappelle que le codage Ω' est défini par $\Omega'(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{i=0}^n \pi(i)^{1+x_i}$. Montrer que le tri dans l'ordre croissant d'une suite, l'entrée et la sortie étant codées par la fonction Ω', est récursif primitif.

Exercice 21. Soit f la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par :

$$f(0) = 1,\ f(1) = 1,\ f(n+2) = f(n+1) + f(n).$$

Montrer que f est récursive primitive.

Exercice 22. Montrer que l'ensemble des fonctions récursives primitives est clos par le schéma de récurrence *sur la suite des valeurs*, c'est-à-dire que le calcul d'une fonction en n peut faire intervenir toutes les valeurs prises par la fonction sur les valeurs plus petites que n.
Soit $g : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$ et $h : \mathbb{N}^{p+2} \to \mathbb{N}$ des fonctions récursives primitives, montrer que la fonction $f : \mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{N}$ définie ci-dessous est récursive primitive :

$$\begin{aligned} f(a_1, \ldots, a_p, 0) &= g(a_1, \ldots, a_p), \\ f(a_1, \ldots, a_p, n+1) &= h\Big(a_1, \ldots, a_p, n, \Omega'\big(f(a_1, \ldots, a_p, 0), \ldots, f(a_1, \ldots, a_p, n)\big)\Big). \end{aligned}$$

Exercice 23. Soit g_1, g_2, h des fonctions récursives primitives. Montrer que la fonction f définie par

$$f(0, y) = g_1(y), \quad f(x+1, 0) = g_2(x), \quad f(x+1, y+1) = h(x, y, f(x, y+1), f(x+1, y))$$

est récursive primitive.

Exercice 24. Soit p un entier non nul. Montrer que l'ensemble ci-dessous est récursif primitif :

$$E_p = \{(a_0, \ldots, a_p) \in \mathbb{N}^{p+1} \mid \text{le polynôme } a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p \text{ a un zéro dans } \mathbb{Z}\}.$$

Exercice 25.

1. Montrer que les fonctions polynômes à plusieurs variables à coefficients dans $\mathbb{N}$ sont primitives récursives.

2. En s'inspirant du codage des suites finies dans $\mathbb{N}$ utilisant la décomposition en facteur premiers, proposer un codage Θ de l'ensemble $\mathbb{N}[X]$ des polynômes à une variable à coefficients dans $\mathbb{N}$ qui soit *bijectif.* Plus précisément, on veut :
(i) $\Theta : \mathbb{N}[X] \Rightarrow \mathbb{N}$ bijective ;
(ii) il existe une fonction primitive récursive $c : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, telle que $c(i, n)$ est le coefficient de degré i dans le polynôme $P_n = \Theta^{-1}(n)$;
(iii) il existe une fonction primitive récursive $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $d(n)$ est le degré du polynôme $P_n = \Theta^{-1}(n)$ (on considère que le degré du polynôme nul est 0).
On note dorénavant P_n pour $\Theta^{-1}(n)$ (ou pour la fonction polynôme associée à P_n).
3. Montrer que l'on peut coder la fonction qui applique une fonction polynôme à un entier, plus précisément, montrer que la fonction $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant $a(n, x) = P_n(x)$ est primitive récursive.

4. Soit les deux fonctions $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $P_{p(n)}$, respectivement $P_{i(n)}$ soit le polynôme dont les monômes sont exactement les monômes de puissance paire, respectivement impaire, de P_n. Montrer que p et i sont primitives récursives.
5. En déduire une fonction partielle récursive $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que si $P_n = \Theta^{-1}(n)$ possède un zéro dans $\mathbb{Z}$, alors $f(n)$ est la valeur absolue d'un zéro de P_n, sinon f n'est pas définie.
6. En fait on peut trouver une fonction primitive récursive qui calcule un zéro de P_n. Montrer qu'il existe une fonction primitive récursive $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, telle que si P_n possède un zéro dans $\mathbb{Z}$, alors $g(n) > 0$ et $g(n) - 1$ est la valeur absolue d'un zéro de P_n, sinon $g(n) = 0$.
7. En déduire que l'ensemble des n tels que P_n possède un zéro dans $\mathbb{Z}$ est primitif récursif.

Exercice 26. On définit les fonctions élémentaires $\mathcal{F}^E$ comme le plus petit sous-ensemble de $\mathcal{F}^*$ contenant :

— les fonctions nulles 0_p ;
— la fonction successeur ;
— la relation d'égalité $R_=$ (définie par $R_=(x, y) = 1$ si $x = y$ et $R_=(x, y) = 0$ sinon) ;
— les projections ;

et clos par les opérations suivantes :

— composition ;
— somme bornée et produit borné. Cela signifie que si cet ensemble contient la fonction

$$(y, x_1, \dots, x_n) \mapsto f(y, x_1, \dots, x_n),$$

alors il contient aussi les fonctions

$$(z, x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{y<z} f(y, x_1, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad (z, x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{y<z} f(y, x_1, \dots, x_n).$$

1. Montrer que $\mathcal{F}^E$ est un sous-ensemble des fonctions récursives primitives.
2. a) Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto xy$ est élémentaire.
   b) Montrer que la relation $R_\leqslant$ est élémentaire (la relation $R_\leqslant$ est définie par $R_\leqslant(x, y) = 1$ si $x \leqslant y$ et $R_\leqslant(x, y) = 0$ sinon).
   c) Montrer que la soustraction propre $\ominus$ est élémentaire (on rappelle que $x \ominus y = x - y$ si $x \geqslant y$ et $x \ominus y = 0$ sinon).
   d) Montrer que $(x, y) \mapsto x + y$ est élémentaire. *Indication :* exprimer la somme à l'aide des produits $(x + 1)(y + 1)$ et xy, et de la soustraction propre.

   On définit les fonctions $e_r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $e_0(x) = x$ et $e_{r+1}(x) = 2^{e_r(x)}$.

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}$, $x^2 < 2^{2^x} = e_2(x)$.

   Dans cet exercice, on dit qu'une fonction $f(x_1, \dots, x_p)$ est *dominée* par e_r si pour tout $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{N}$, $f(x_1, \dots, x_p) \leqslant e_r(\max(x_1, \dots, x_p))$.

4. Montrer que pour toute fonction élémentaire $(x_1, \dots, x_p) \mapsto f(x_1, \dots, x_p)$, il existe un entier r tel que e_r domine f.
5. Montrer que la fonction $n \mapsto e_n(n)$ est récursive primitive.
6. En déduire que $\mathcal{F}^E$ est un sous-ensemble *strict* des fonctions récursives primitives.