DM 2 - à rendre le 5 novembre

Exercice 1. Itération.
Pour $f \in \mathcal{F}_1^*$, on note $f^{\circ n} = \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{n+1 \text{ fois}}$.

1. Montrer que si f est récursive, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{\circ n}$ est récursive.
2. Montrer que si f est récursive, alors il existe une fonction récursive totale $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout n, $\alpha(n)$ est un indice de $f^{\circ n}$.
3. Montrer qu'il existe un indice $i \in I_1$ tel que $(\varphi_i^1)^{\circ i} = \varphi_i^1$.

Solution de l'exercice 1.

1. Par récurrence, en utilisant le fait que toute composée de fonctions récursives est récursive.
2. Soit $g \in \mathcal{F}_2^*$ définie par récurrence par

$$g(0, x) = f(x)$$
$$g(n+1, x) = f(g(n, x))$$

   Alors g est récursive car définie par récurrence à partir de fonctions récursives, soit k un indice de g. Alors d'après le théorème s-n-m, pour tous n, x on a

$$g(n, x) = \varphi^2(k, n, x) = \varphi^1(s_1^1(k, n), x).$$

   Or par construction on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{N}$, $f^{\circ n}(x) = g(n, x)$, et donc si on pose $\alpha(n) = s_1^1(k, n)$ alors α est la fonction voulue.
3. Considérons maintenant la fonction définie par récurrence par

$$h(0, i, x) = \varphi^1(i, x)$$
$$h(n+1, i, x) = \varphi^1(i, h(n, i, x)).$$

   La fonction h est récursive car définie par récurrence à partir de fonctions récursives, de plus à i et n fixés, la fonction $x \mapsto h(n, i, x)$ est $(\varphi_i^1)^{\circ n}$. Soit k un indice de h, alors on a pour tous n, i, x

$$h(n, i, x) = \varphi^3(k, n, i, x) = \varphi^1(s_2^1(k, n, i), x).$$

   En particulier pour $n = i$ on a que $s_2^1(k, i, i)$ est un indice de la fonction $(\varphi_i^1)^{\circ i}$. D'après le théorème de point fixe, il existe un indice i tel que

$$\varphi_i^1 = \varphi_{s_2^1(k,i,i)}^1 = (\varphi_i^1)^{\circ i}.$$

Exercice 2. Plus de paramètres.
Soit $p \geqslant 2$. On rappelle qu'on dispose d'une bijection $\alpha_p : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$ récursive primitive.

1. Montrer qu'il existe une fonction récursive $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $i \in I_1$, $\beta(i)$ est un indice de la fonction $\varphi_i^1 \circ \alpha_p$.
2. En déduire une preuve du théorème de Rice pour des ensembles de fonctions récursives à p paramètres, après avoir proposé un énoncé pour ce dernier.

Solution de l'exercice 2.

1. On pose $g(i, x_1, ..., x_p) = \varphi^1(i, \alpha_p(x_1, ..., x_p))$, alors g est récursive comme composée de fonctions récursives. Soit k un indice de g, alors d'après le théorème s-n-m pour tous $i, x_1, ..., x_p$,

$$g(i, x_1, ..., x_p)) = \varphi^{p+1}(k, i, x_1, ..., x_p) = \varphi^p(s_2^p(k, i), x_1, ..., x_p).$$

   Ainsi par construction la fonction β définie par $\beta(i) = s_2^p(k, i)$ est comme voulue.

2. Un énoncé du théorème de Rice pour les fonctions récursives à p paramètres est : soit $\mathcal{G}$ un sous ensemble non vide de $\mathcal{R}^p$ distinct de $\mathcal{R}^p$, alors l'ensemble d'indice $A_\mathcal{G} := \{i \in \mathbb{N} : \varphi_i^p \in \mathcal{G}\}$ n'est pas récursif. En effet, supposons qu'il le soit, considérons l'ensemble de fonctions à 1 paramètre $\mathcal{G}' = \{f \in \mathcal{R}^1 : f \circ \alpha_p \in \mathcal{G}\}$. Alors $\mathcal{G}'$ est non vide (si $f \in \mathcal{G}$, la fonction $f \circ (\beta_p^1, ..., \beta_p^p)$ sera dans $\mathcal{G}'$) et $\mathcal{G}'$ est différent de $\mathcal{R}^1$ (en effet si $f \notin \mathcal{G}$, alors $f \circ (\beta_p^1, ..., \beta_p^p) \notin \mathcal{G}'$). D'après le théorème de Rice l'ensemble

$$A_{\mathcal{G}'} = \{i \in \mathbb{N} : \varphi_i^1 \in \mathcal{G}'\}$$

   est non récursif. Or la fonction β de la question précédente est clairement une réduction de $A_{\mathcal{G}'}$ à $A_\mathcal{G}$ qui ne peut donc pas non plus être récursif.

Exercice 3. Calculer proprement.

On dit qu'une machine de Turing M à $n \geqslant 2$ bandes *calcule proprement* si, quelle que soit l'entrée $x \in \mathbb{N}$, si le calcul sur l'entrée x termine, alors à la fin du calcul la bande de sortie code un entier (c'est-à-dire qu'elle est de la forme # puis une suite finie de 1 puis que des 0 [1]. On considère l'ensemble

$$A = \{i \in I_1 : i \text{ est l'indice d'une machine qui calcule proprement}\}$$

1. Expliquer brièvement pourquoi toute fonction récursive est calculable par une machine qui calcule proprement.
2. Montrer que A est de complémentaire récursivement énumérable.
3. Montrer que A n'est pas récursivement énumérable. On pourra s'inspirer de la preuve du théorème de Rice.

Solution de l'exercice 3.

1. C'est en fait ce qu'on prouve quand on montre que toute fonction récursive est calculable.
2. On dit qu'une bande est propre si elle code un entier. L'ensemble A des couples (i, x, t) tels que au temps t, sur l'entrée x, la machine de code i a sa bande de sortie qui est propre est récursif primitif (pour vérifier que la bande de sortie est propre, il suffit de calculer l'indice du premier 0 de la bande de sortie (qui est $\leqslant t$), puis de vérifier que toutes les cases suivantes jusqu'à la case t sont nulles). Notons $T(i, x)$ le temps de calcul de la machine d'indice i sur une entrée x, alors on a vu que T est une fonction récursive, et la machine n'est pas propre ssi il existe x tel que $(i, x, T(i, x)) \notin A$. L'ensemble des (i, x) tels que $(i, x, T(i, x)) \notin A$ est récursivement énumérable car c'est l'intersection du graphe de T (qui est récursivement énumérable) avec le complémentaire de A (qui est récursif). Ainsi, l'ensemble des indices de machines non propres est la projection sur la première coordonnée d'un ensemble récursivement énumérable, donc récursivement énumérable : $\bar{A}$ est récursivement énumérable.

1. Rappelons que dans le cours, on a dit qu'une machine de Turing définit toujours une fonction $f \in \mathcal{F}_1^*$, et que si le calcul termine mais la bande de sortie ne code pas un entier, la fonction renvoie le nombre de 1 consécutifs suite au # sur la bande de sortie.

3. Remarquons que toute machine qui calcule la fonction vide la calcule proprement. Soit M une machine qui ne calcule pas proprement (par exemple une machine qui, indépendamment de son entrée, écrit 101 sur la bande de sortie). Considérons la machine de Turing $\tilde{M}$ qui, sur une entrée (x, y), effectue le calcul de M sur y puis, sur des bandes de travail supplémentaires, effectue le calcul de $\varphi^1(x, x)$. D'après la preuve du théorème s-n-m, on a une fonction récursive primitive β qui à x associe le code de la machine de Turing qui commence par mettre x sur le premier ruban de $\tilde{M}$ puis laisse $\tilde{M}$ effectuer son calcul. Pour chaque x, soit x est dans le domaine de $\varphi^1(x, x)$ auquel cas la machine de code $\beta(x)$ ne calcule pas proprement (car elle effectue le calcul de M sur y, qui n'est pas propre), soit x n'est pas dans le domaine de $\varphi^1(x, x)$ auquel cas la machine de code $\beta(x)$ calcule la fonction vide, et effectue donc son calcul proprement. Ainsi β est une réduction récursive de dom $\varphi^1(x, x)$ vers $\bar{A}$, donc A n'est pas récursivement énumérable.

Exercice 4. Antidiagonale.
Étant donné un sous-ensemble $A \subseteq \mathbb{N}^2$, son *antidiagonale* est l'ensemble

$$\text{antidiag}(A) := \{n \in \mathbb{N} : (n, n) \notin A\}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, la section verticale de A au dessus de n est l'ensemble $A_n := \{m \in \mathbb{N} : (n, m) \in A\}$.

1. Montrer que si $B = \text{antidiag}(A)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B \neq A_n$.
2. Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble récursif $A \subseteq \mathbb{N}^2$ tel que pour tout $B \subseteq \mathbb{N}$ récursif, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B = A_n$.
3. Montrer qu'il existe un ensemble récursivement énumérable $A \subseteq \mathbb{N}^2$ tel que pour tout $B \subseteq \mathbb{N}$ récursivement énumérable, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B = A_n$.
4. Montrer que l'antidiagonale d'un tel A n'est pas récursivement énumérable, bien que son complémentaire le soit.

Solution de l'exercice 4.

1. Supposons par l'absurde que $B = A_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors on a l'équivalence $(n, n) \notin A \iff n \in B \iff (n, n) \in A$ qui est absurde.
2. Si un tel ensemble existait, soit B son antidiagonale, alors pour tout n on a $\chi_B(n) = 1 - \chi_A(n, n)$ donc B est récursif. Mais alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B = A_n$, ce qui d'après la première question est impossible.
3. $A = \text{dom } \varphi^1$ convient. En effet si B est récursivement énumérable, soit x tel que $B = \text{dom } \varphi^1_x$, alors par définition $B = A_x$.
4. D'après la question 1, l'antidiagonale de A n'est pas une section verticale de A, donc elle n'est pas récursivement énumérable d'après la section précédente. Par définition son complémentaire est le domaine de $x \mapsto \varphi^1(x, x)$, qui est récursivement énumérable.