Autour du théorème de Dye

François Le Maître - f.lemaitre@math.univ-paris-diderot.fr

Exercice 1. Se ramener à des ensembles invariants.
Soit (X, μ) un espace de probabilité standard, soient $\Gamma, \Lambda \curvearrowright (X, \mu)$ deux actions pmp.

1. Montrer que s'il existe $X' \subseteq X$ de mesure pleine tel que pour tout $x \in X'$, $\Gamma x \cap X' = \Lambda x \cap X'$, alors il existe un tel X' qui soit à la fois Γ et Λ-invariant (on pourra commencer par montrer qu'on peut supposer que X' est Γ-invariant).
2. Conclure que dans la définition de l'isomorphisme pour des relations d'équivalence pmp $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ sur (X, μ) et (Y, ν) espaces de probabilité standards, on peut supposer que les ensembles X' et Y' de mesure pleine sont respectivement $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$-invariants.

Exercice 2. L'odomètre est partout.
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence pmp ergodique. Montrer que le groupe plein de $\mathcal{R}$ contient un élément qui est conjugué à un odomètre.

Exercice 3. Hyperfinitude dans le cas non ergodique.
Soit (X, μ) un espace de probabilité standard et soit $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$.

1. Montrer que l'ensemble des points $x \in X$ dont la T-orbite est finie est borélien.
2. On se propose de donner une autre preuve du lemme des marqueurs : utiliser une suite (C_n) dénombrable de boréliens qui sépare les points, et construire d'abord par récurrence une suite décroissante (B_n) telle que pour chaque n et chaque x d'orbite infinie, la T-orbite de x intersecte B_n en une infinité de points, et soit $B_n \subseteq C_n$, soit $B_n \cap C_n = \emptyset$. Montrer que $\bigcap_n B_n$ intersecte chaque T-orbite en au plus un point, et conclure. Comment généraliser la preuve aux relations d'équivalence pmp ergodiques quelconques ?
3. Montrer que si A intersecte toutes les orbites infinies de T, alors pour presque tout x dont l'orbite est infinie, on a qu'il existe $n < 0$ et $m > 0$ tel que $T^n(x) \in A$ et $T^m(x) \in A$. En déduire une relation d'équivalence finie naturelle sur X définie à partir de A, en identifiant chaque T-orbite à un graphe dont les arêtes sont les $(x, T^{\pm 1}(x))$. Utiliser cette relation pour montrer que $\mathcal{R}_T$ est μ-hyperfinie.