Espaces de probabilité (quasi) standards, algèbres de mesure

François Le Maître - f.lemaitre@math.univ-paris-diderot.fr

Exercice 1. Un fermé utile.

1. Montrer que si F est un fermé de $\mathbb{R}$, et A est un borélien de $[0,1]$, l'ensemble des $f \in \mathrm{L}^\infty([0,1])$ telles que $f(x) \in F$ pour presque tout $x \in A$ est un fermé de $\mathrm{L}^\infty([0,1])$. On pourra utiliser la distance à F [1].
2. Dans le cours, on a prétendu que l'espace des f tels que $f(x) \in F$ pour presque tout $x \in A$ et $f(x) \notin F$ pour presque tout $x \in [0,1] \setminus A$ est fermé. Expliquer pourquoi c'est faux, et pourquoi la preuve donnée en cours marche quand même en utilisant l'énoncé de la question précédente.

Exercice 2. Séparabilité de l'algèbre de mesure.

On fixe un espace métrique séparable (X,d).

1. Montrer que tout fermé F de X s'écrit comme une intersection dénombrable décroissante d'ouverts. On pourra considérer la distance à F.
2. Montrer que toute mesure de probabilité sur X est régulière, c'est-à-dire que pour tout $A \subseteq X$ borélien, on a $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert et } A \subseteq U\}$. On pourra montrer que les ensembles mesurables A tels que A et son complémentaire satisfont cette conclusion forment une sigma-algèbre qui contient les ouverts.
3. Montrer que X est à base dénombrable d'ouverts.
4. Conclure que $\mathrm{MAlg}(X,\mu)$ est séparable.
5. Montrer que l'algèbre engendrée par les intervalles dyadiques (i.e. de la forme $[k/2^n, k+1/2^n]$) est dense dans $\mathrm{MAlg}([0,1],\lambda)$).

Exercice 3. Actions pmp et morphismes de groupe.

Soit Γ un groupe dénombrable. Expliquer comment associer à chaque morphisme de groupe $\Gamma \to \mathrm{Aut}(X,\mu)$ une véritable action pmp de Γ sur (X,μ). *La difficulté vient du fait que si on choisit des relevés $\tilde\gamma$ qui sont des bijections boréliennes pmp sur l'espace entier, on a seulement $\tilde\gamma_1\tilde\gamma_2 x = \widetilde{\gamma_1\gamma_2}x$ pour presque tout x.*

1. On rappelle que c'est la fonction $d_F : x \mapsto \inf_{y\in F} d(x,y)$, et que $d_F(x) = 0$ ssi $x \in F$.