Introduction à l'équivalence orbitale

François Le Maître - f.lemaitre@math.univ-paris-diderot.fr

Les exercices ci-dessous sont importants car ils font partie intégrante du cours ; je ne prévois pas d'écrire de corrigés mais n'hésitez pas à m'envoyer un mail en cas de blocage (il est de plus fort probable que certains énoncés comportent des erreurs).

Rappels de théorie de la mesure

Exercice 1. Espaces topologiques à base dénombrable d'ouverts.
On rappelle qu'un espace topologique est à base dénombrable d'ouverts s'il existe une famille dénombrable d'ouverts $\mathcal{B}$ telle que tout ouvert s'écrive comme réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

1. Montrer que tout produit dénombrable d'espaces topologiques à base dénombrable d'ouverts est à base dénombrable d'ouverts.
2. Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'espaces topologiques à base dénombrable d'ouverts, la tribu produit des tribus boréliennes sur X_n coincide avec la tribu des boréliens de $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ muni de la topologie produit.
3. Montrer que tout espace métrique séparable est à base dénombrable d'ouverts.

Exercice 2. Mesure de probabilité sur un produit.
Soit $(X_n, \mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces de probabilité, on munit le produit $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ de la tribu produit $\mathcal{B} = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$, qui est la plus petite tribu rendant les projections $\pi_n : X \to X_n$ mesurables. Un sous-ensemble mesurable A de X est dit **cylindrique** s'il existe $F \subseteq \mathbb{N}$ fini et pour chaque $n \in F$ un ensemble $A_n \in \mathcal{B}_n$ tels que

$$A = \bigcap_{n\in F} \pi_n^{-1}(A_n).$$

1. En utilisant le lemme de la classe monotone, montrer que tout mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{B})$ est complètement déterminée par les valeurs qu'elle donne aux ensembles cylindriques.
2. Montrer que pour tout ensemble mesurable $A \in \mathcal{B}$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble B qui s'écrit comme réunion disjointe d'ensembles cylindriques et tel que $\mu(A \triangle B) < \epsilon$. (indication : on pourra montrer que l'ensemble de tels A est une σ-algèbre en observant que le complémentaire d'un ensemble cylindrique s'écrit comme réunion finie disjointe d'ensembles cylindriques).

Actions pmp

Exercice 3. Une astuce à avoir en tête.
On fixe une action pmp $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$. On rappelle qu'un ensemble mesurable A est de mesure pleine si $\mu(X \setminus A) = 0$, ce qui dans un espace de probabilité revient à dire que $\mu(A) = 1$. On donne dans la première question une astuce importante ; on donne ensuite deux applications simples.

1. Montrer que que tout ensemble mesurable de mesure pleine contient un ensemble mesurable Γ-invariant de mesure pleine. (Indication : montrer que le plus grand ensemble Γ-invariant contenu dans notre ensemble convient)
2. Terminer la preuve du fait que les décalages de Bernoulli sont des actions libres (en partant du fait vu en cours qu'il y a pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$ un ensemble X_γ de mesure pleine tel que pour tout $x \in X_\gamma$, $x \neq \gamma x$).

3. Dans la définition de l'équivalence orbitale entre groupes vue en cours, montrer que l'on peut supposer que l'ensemble de mesure pleine en restriction duquel les relations d'équivalence $\mathcal{R}_\Gamma$ et $\mathcal{R}_\Lambda$ coïncident est Γ-invariant.

Exercice 4. Ergodicité de l'odomètre.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note T_0 l'odomètre et τ_n l'odomètre fini sur $\{0,1\}^n$. On rappelle que si $s \in \{0,1\}^n$ on a $T_0(N_s) = N_{\tau_n(s)}$.

1. Montrer que τ_n est transitif.
2. Soit $A \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mesurable et T_0-invariant tel que $\mu(A) > 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $s, s' \in \{0,1\}^n$, on a $\mu(N_s \cap A) = \mu(N_{s'} \cap A)$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $s \in \{0,1\}^n$, on a $\mu(A \cap N_s) = \frac{1}{2^n}\mu(A)$.
4. En utilisant l'unicité de mesure vue à l'exercice précédente, montrer que $\mu(A) = \mu(A)^2$ et conclure que l'odomètre est ergodique.

Exercice 5. Ergodicité des décalages de Bernoulli.

Soit ν une mesure de probabilité non dégénérée sur $[0,1]$. On va montrer que le décalage de Bernoulli $\Gamma \curvearrowright ([0,1]^\Gamma, \nu^{\otimes\Gamma})$ est ergodique. Étant donnée $F \subseteq \Gamma$, on dit qu'un ensemble $A \subseteq [0,1]^\Gamma$ est F-mesurable s'il est mesurable pour la tribu engendrée par la projection naturelle $\pi_F : [0,1]^\Gamma \to [0,1]^F$.

1. Montrer que si F_1 et F_2 sont deux sous-ensembles disjoints de Γ, alors si A_1 est F_1-mesurable et A_2 est F_2-mesurable, on a
$$\mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1)\mu(A_2).$$
On pourra utiliser la première question de l'exercice 2.
2. Montrer que pour tout $F \subseteq \Gamma$ fini, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel qu $\gamma F \cap F = \emptyset$.
3. Un sous-ensemble de $[0,1]^\Gamma$ est *basique* s'il est F-mesurable pour un certain $F \subseteq \Gamma$ fini. Montrer que pour tout ensemble basique A, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\mu(A \cap \gamma A) = \mu(A)^2$.
4. En déduire que pour tout ensemble mesurable Γ-invariant, on a $\mu(A) = \mu(A)^2$ et conclure. On pourra utiliser la deuxième question de l'exercice 2.

En utilisant des idées proches, on peut montrer que le décalage de Bernoulli est **mélangeant**, c'est-à-dire que pour tout A, B mesurables et tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble fini $F' \subseteq \Gamma$ tel que pour tous $\gamma \in \Gamma \setminus F'$, on a
$$|\mu(A \cap \gamma B) - \mu(A)\mu(B)| < \epsilon.$$

C'est un bon exercice supplémentaire !