TD2 - Espace de Cantor, espace de Baire

Exercice 1. Espaces de Cantor triadiques.
Etant donné $\lambda \in]0, 1/2[$ et $a < b \in \mathbb{R}$, on associe à l'intervalle fermé $[a, b]$ deux intervalles

$$C_{0,\lambda}([a, b]) = [a + \lambda(b - a)] \text{ et } C_{1,\lambda}([a, b]) = [b - \lambda(b - a), b].$$

1. On construit par récurrence un schéma d'intervalles $(F_s)_{s\in 2^{<\mathbb{N}}}$ sur $[0, 1]$ en posant $F_\emptyset = [0, 1]$ puis pour tout $s \in 2^{<\mathbb{N}}$,

$$F_{s0} = C_{0,1/3}(F_s) = [a + \lambda(b - a)] \text{ et } F_{s1} = C_{1,1/3}(F_s).$$

   Montrer que l'application $f : 2^{\mathbb{N}} \to [0, 1]$ donnée par $\{f(x)\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{x\restriction n}$ est bien définie et continue. Son image de l'application associée $f : 2^{\mathbb{N}} \to [0, 1]$ est ce qu'on appelle l'espace triadique de Cantor.
2. Montrer que l'espace triadique de Cantor est fermé d'intérieur vide, et de mesure de Lebesgue nulle.
3. En faisant varier λ en fonction de $|s|$ dans la construction ci-dessus, montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une copie de l'espace de Cantor dans $[0, 1]$ de mesure de Lebesgue plus grande que $1 - \epsilon$.
4. Montrer que $[0, 1]$ contient un G_δ dense dont le complémentaire est de mesure de Lebesgue 1.

Exercice 2. Une autre preuve de l'universalité de l'espace de Cantor.
On se propose de donner une autre preuve du fait que tout compact polonais est l'image continue de l'espace de Cantor.

1. Montrer que l'espace de Cantor se surjecte continûment sur $[0, 1]$, puis sur $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.
2. En utilisant le fait que $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ contient tout compact polonais et que tout fermé de l'espace de Cantor est un retract de l'espace de Cantor, déduire que l'espace de Cantor se surjecte continûment sur tout compact polonais.

Exercice 3. Caractérisation de l'espace de Baire.
Montrer que l'espace de Baire est à homéomorphisme près le seul espace polonais parfait zéro-dimensionel non vide dont tous les compact sont d'intérieur vide. On pourra s'inspirer de la preuve de le caractérisation de l'espace de Cantor.

Exercice 4. Courbe de Peano.
En utilisant un espace de Cantor triadique (cf. exercice 1), montrer que $[0, 1]$ se surjecte continûment sur $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Exercice 5. Espace d'applications continues.
Soit (Y, d) un espace métrique complet séparable, et soit X un compact polonais.

1. Montrer que l'espace des applications continues de X dans Y est complet pour la distance $d_\infty(f, g) = \max_{x\in X} d(f(x), g(x))$.
2. Montrer qu'il est également séparable. On pourra commencer par le cas où $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 6. L'espace de Baire est un G_δ de l'espace de Cantor. Montrer que l'espace de Baire est homéomorphe à un G_δ de l'espace de Cantor. On pourra utiliser l'application $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$f((n_k)_{k\in\mathbb{N}}) = 01^{n_0}01^{n_1}01^{n_2}...$$

On rappelle que 1^n désigne la suite finie formée de n 1.

Exercice 7. Points de condensation.
Soit X un espace polonais, alors $x \in X$ est appelé un **point de condensation** si tous les voisinages de x sont non dénombrables. Montrer que l'ensemble des points de condensation de X est fermé, puis qu'en fait le coeur parfait de X est l'ensemble de ses points de condensation.

Exercice 8. Construction de Cantor-Bendixon et groupes dénombrables.
Soit Γ un groupe dénombrable infini. On considère $\{0,1\}^\Gamma$ muni de la topologie produit, qui en fait un espace de Cantor et que l'on identifie à l'ensemble des parties de Γ.

1. Soit $\mathcal{SG}_\Gamma$ l'ensemble des sous groupes de Γ. Montrer que $\mathcal{SG}_\Gamma$ est un fermé de $\{0,1\}^\Gamma$.
2. Montrer que les points isolés de $\mathcal{SG}_\Gamma$ sont de type fini.
3. Effectuer la construction de Cantor-Bendixon sur $\mathcal{SG}_\mathbb{Z}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le rang de Cantor-Bendixon de $\mathcal{SG}_{\mathbb{Z}^n}$ est égal à $n+1$.

Exercice 9. Un peu de théorie des modèles.
Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et T une $\mathcal{L}$-théorie complète. On dit que T est **petite** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace de ses n-types $S_n(T)$ est dénombrable.
On dit que T admet un **arbre de formules consistantes** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et un schéma de formules $(\varphi_s(\bar{x}))_{s\in\{0,1\}^{<\mathbb{N}}}$ en n variables tel que $\forall s \in 2^{<\mathbb{N}}$

(1) $T \vdash \exists \bar{x} \varphi_s(\bar{x})$

(2) $T \vdash \forall \bar{x} \neg(\varphi_{s0}(\bar{x}) \wedge \varphi_{s1}(\bar{x}))$

(3) $T \vdash \forall \bar{x}\, ((\varphi_{s0}(\bar{x}) \to \varphi_s(\bar{x})) \wedge ((\varphi_{s1}(\bar{x}) \to \varphi_s(\bar{x}))$

1. Montrer que $S_n(T)$ est un fermé de l'espace de Cantor.
2. Montrer que T admet un arbre de formules ssi T n'est pas petite.
3. Montrer que si T est petite alors l'ensemble des types isolés est dense dans $S_n(T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Indications

- **Exercice 3** : $F_\emptyset = X$, chaque F_s est un ouvert-fermé non vide, les $F_{s\wedge i}$ pour $i \in \mathbb{N}$ partitionnent F_s et le diamètre de $F_{x\restriction n}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.
- **Exercice 4** : prolonger de manière affine une surjection continue $2^\mathbb{N} \to [0,1]^\mathbb{N}$
- **Exercice 8** : pour la dernière question, on peut commencer par montrer que les points isolés de $\mathcal{SG}_{\mathbb{Z}^n}$ sont les sous-groupes de rang n.