DM4 - à rendre le 5 avril

Exercice 1. G_δ denses et actions continues.
Soit X un espace polonais sur lequel un groupe polonais G agit continument.

1. Montrer que si U est un ouvert, alors l'ensemble
$$U^{*G} := \{x \in X : \forall^* g, g \cdot x \in U\}$$
est un G_δ, et que U^{*G} est dense ssi U est dense.
2. En déduire le résultat suivant, utilisé dans la preuve du premier lemme du théorème de turbulence : si C est un G_δ dense, alors l'ensemble
$$C^{*G} := \{x \in X : \forall^* g, g \cdot x \in A\}$$
est également un G_δ dense.

Exercice 2. Espace des ordres totaux.
Soit $\mathcal{L} = \{<\}$ et T la théorie des ordres totaux.

1. Expliquer pourquoi l'espace $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(T)$ des modèles dénombrables de T est compact.
2. Montrer que l'action $\mathfrak{S}_\infty \curvearrowright \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}(T)$ a toutes ses orbites denses.
3. Montrer que cette action a une orbite G_δ que l'on identifiera.

Exercice 3. Une action turbulente.
Considérons $G = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ que l'on identifie à l'espace de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ via l'application qui à une partie de $\mathbb{N}$ associe sa fonction caractéristique.

1. Montrer que G est un groupe polonais pour l'opération de groupe $(A, B) \mapsto A \triangle B$, et que l'ensemble des parties finies forme un sous-groupe dense de G.
2. On fixe une mesure μ sur $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < \mu(\{n\}) < +\infty$. Soit
$$H_\mu = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \mu(A) < +\infty\}.$$
Montrer que H_μ est un sous groupe de G qui est polonais pour la topologie induite par la distance $d_\mu(A, B) = \mu(A \triangle B)$.
3. Montrer que si $\mu(\{n\}) \to 0$ $[n \to +\infty]$, alors tout point de G est turbulent pour l'action de H sur G par translation.
4. En déduire une condition suffisante pour que l'action de H_μ sur G par translation soit turbulente, et donner un exemple concret de mesure μ satisfaisant cette condition.