DM2 - à rendre le 16 février

Exercice 1. Calculs de complexité

1. Montrer que l'ensemble des suites $(x_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telles que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ est un $\mathbf{\Pi}^0_3(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$.
2. Un sous-ensemble A de $\mathbb{N}$ est dit de densité nulle si
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|A \cap \{0, ..., n-1\}|}{n} = 0.$$
Montrer que l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ de densité nulle est un $\mathbf{\Pi}^0_3(2^{\mathbb{N}})$.

Exercice 2. Absence de paramétrage universel des boréliens.
Soit X un espace polonais. Montrer qu'il n'y a pas de X-paramétrage universel de $\mathbf{\Delta}^1_1(X)$.

Exercice 3. Un ensemble $\mathbf{\Pi}^0_3$-complet.
Montrer que toute suite d'entiers $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est déterminée par la suite d'ensembles $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par
$$A_k = \{n \in \mathbb{N} : u_n \leqslant k\}.$$
On rappelle que l'ensemble des suites de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ est $\mathbf{\Pi}^0_3$-complet dans $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$. Montrer que l'ensemble des suites croissantes de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ dont la réunion est égale à $\mathbb{N}$ est également $\mathbf{\Pi}^0_3$-complet.
En utilisant les constructions précédentes, montrer que l'ensemble des suites d'entiers qui tendent vers $+\infty$ est $\mathbf{\Pi}^0_3$-complet.

Exercice 4. Les ensembles analytiques satisfont l'hypothèse du continu.
Soit X, Y deux espaces polonais et $f : X \to Y$ continue. On va montrer que si $f(X)$ n'est pas dénombrable alors il contient une copie homéomorphe de l'espace de Cantor. Supposons donc $f(X)$ non dénombrable.

1. Soit $U := \bigcup\{V \text{ ouvert de } X : f(V) \text{ dénombrable}\}$. Montrer que $f(U)$ est dénombrable. En déduire que l'on peut se ramener au cas où pour tout W ouvert de X, $f(W)$ n'est pas dénombrable.
2. En utilisant un schéma de Cantor, montrer qu'il existe une copie K de l'espace de Cantor dans X telle que $f_{\restriction K}$ soit injective.
3. Conclure que tout sous-ensemble analytique de tout espace polonais satisfait l'hypothèse du continu.

Exercice 5. Ensemble des bons ordres sur $\mathbb{N}$.
On rappelle qu'un ordre sur $\mathbb{N}$ est bon si tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum. Cela revient à dire qu'on a un ordre total bien fondé.

1. Montrer que l'ensemble des ordres sur $\mathbb{N}$ est un fermé du compact métrisable $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.
2. Montrer que l'ensemble WO (well-order) des bons ordres sur $\mathbb{N}$ est coanalytique.
3. Étant donné un arbre T sur $\mathbb{N}$, on définit l'ordre de Kleene-Brouwer sur l'arbre T par : pour $s, t \in T$, on pose $s <_{KB} t$ si s est un descendant de t (ce que l'on a noté $s \supsetneq t$ ou $s \prec t$ dans le cours) ou si $s_i < t_i$ où i est le premier entier tel que $s_i \neq t_i$ (on a donc essentiellement l'ordre lexicographique avec par exemple $000 <_{KB} 01$, sauf que 01 est plus petit que 0 !). Montrer que T est bien fondé si et seulement si $(T, <_{KB})$ est bien ordonnée.
4. En déduire que l'ensemble WO est $\mathbf{\Pi}^1_1$-complet.