DM2 - corrigé de l'exercice 3

Soit X l'ensemble des suites croissantes de parties de $\mathbb{N}$ dont la réunion est $\mathbb{N}$ tout entier. On va d'abord montrer que X est G_δ, donc polonais.

Une suite (B_n) de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ est croissante ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout k, $k \in A_n \Rightarrow k \in A_{n+1}$, donc l'ensemble des suites croissantes de parties de $\mathbb{N}$ est fermé. De plus, une suite (B_n) est de réunion $\mathbb{N}$ ssi pour tout k il existe n tel que $k \in A_n$, ainsi l'ensemble des suites de parties de réunion $\mathbb{N}$ est G_δ. Ainsi X est G_δ, donc polonais.

Soit B l'ensemble des suites croissantes de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ dont la réunion est $\mathbb{N}$. On voit B comme sous-ensemble de X. Soit C l'ensemble des suites de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$. Une réduction de C à B est donnée par la fonction f qui à une suite (A_n) de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ associe la suite (B_n) donnée par

$$B_n = \{0, ..., n\} \cup \bigcup_{i=0}^{n} A_i.$$

En effet la suite $f((A_n))$ est toujours croissante de réunion $\mathbb{N}$, et elle est constituée uniquement d'ensembles finis ssi pour tout n, A_n est fini. La fonction f est bien continue par continuité des opérations booléennes sur les sous-ensembles et continuité des projections. Ainsi f est une réduction continue de C à B qui est donc $\mathbf{\Pi}^0_3$-difficile.

De plus notre ensemble B est l'intersection de C avec l'ensemble X donc B est bien $\mathbf{\Pi}^0_3$, donc il est $\mathbf{\Pi}^0_3$-complet comme voulu.

Maintenant, on a une bijection naturelle entre X et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ donnée par l'énoncé : à une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on associe la suite (A_n) donnée par $A_n = \{k : n_k \leqslant n\}$. La bijection réciproque associe à une suite (A_n) croissante de réunion $\mathbb{N}$ la suite (n_k) définie par $n_k = \min\{n : k \in A_n\}$. Il est facile de vérifier que cette bijection est un homéomorphisme, or elle envoie clairement B sur l'ensemble des suites tendant vers $+\infty$, ainsi ce dernier est également $\mathbf{\Pi}^0_3$-complet.